

TEIL D: STOCHASTIK

§28 Grundbegriffe

28.1 Gebietsabgrenzung

Stochastik (aus dem Griechischen: “vermuten”, “erwarten”) ist die Mathematik des Zufalls. Sie gliedert sich in 2 Gebiete:

a) **Wahrscheinlichkeitstheorie:**

Ausgehend von einem (wahrscheinlichkeitstheoretischen) Modell werden Wahrscheinlichkeiten berechnet.

Beispiel: Modellannahme: Beim Wurf eines Würfels habe jede der Augenzahlen 1,...,6 die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

Folgerung: Wahrscheinlichkeit für Augenzahl 1 oder 3 ist $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

b) **Statistik:**

Ausgehend von realen Daten / Beobachtungen will man Schlussfolgerungen ziehen.

Beispiele:

- i) Möglichst gute Approximationsgerade durch Fehler behaftete Messwerte legen
- ii) Hypothesentest. Ist ein neues Medikament wirksam?

28.2 Wahrscheinlichkeiten

- a) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses beschreibt die zu erwartende relative Häufigkeit, mit der dieses Ereignis eintritt, wenn man den zu Grunde liegenden Prozess immer wieder unter den gleichen Bedingungen wiederholt.

Beispiel: Bei einer „fairen“ Münze beträgt die Wahrscheinlichkeit, Zahl zu werfen, gerade $\frac{1}{2}$.

- b) Ein Experiment heißt **Laplace-Experiment**, wenn es endlich viele einander ausschließende Ausgänge hat, die alle gleich wahrscheinlich sind.

Beispiele:

- i) Der Wurf eines Würfels hat 6 gleichberechtigte Ausgänge $\Rightarrow$ Laplace-Experiment
- ii) Ein Reißzweckwurf hat 2 mögliche, nicht gleichberechtigte Ausgänge $\Rightarrow$ kein Laplace-Experiment

c) Mengentheoretische Wahrscheinlichkeitsbeschreibung

Wir betrachten hier Zufallsexperimente mit endlich vielen Ausgängen

Ergebnismenge Ω (**Stichprobenraum**, **Grundraum**) ist eine endliche nichtleere Menge, deren Elemente ω die Versuchsausgänge beschreiben.

Beispiel: Würfelexperiment: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Ereignis: Teilmenge von Ω

Beispiel: Ergebnisse, bei denen 2 oder 5 gewürfelt wird $A = \{2,5\}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung, Wahrscheinlichkeitsmaß:

Abbildung P von eine Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von Ω in $[0,1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) Normiertheit: $P(\Omega) = 1$
- ii) Nichtnegativität: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$
- iii) Additivität: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für alle disjunkten $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$