

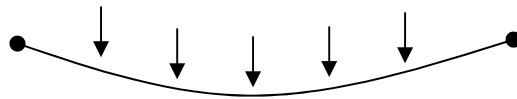
§27 Variationsrechnung

27.1 Motivation

Bisher haben wir uns mit Optimierungsproblemen befasst, bei denen ein einzelner optimaler Wert (Maximum oder Minimum einer Funktion, evtl. mit Nebenbedingungen) gesucht war. Wir gehen jetzt zu Problemen über, bei denen eine gesamte Funktion gesucht wird, die ein Optimalitätskriterium erfüllt.

Solche Fragestellungen tauchen in der Praxis oft auf, z.B.

- a) Welche Form nimmt ein Bücherbrett an, wenn es gleichmäßig belastet wird?



Die gesuchte Funktion minimiert ein Integral, in dem eine Biegeenergie auftritt. (verwandtes Problem: Crashtestsimulation)

- b) Ein verrauschtes Signal $f(x)$, $x \in [0,1]$ soll so gefiltert werden, dass das resultierende Signal $u(x)$ zwar noch nahe an $f(x)$ liegt, aber nur geringe Schwankungen aufweist. Wir suchen also z.B. $u(x)$ als Minimum des „Energiefunktional“

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\underbrace{(u(x) - f(x))^2}_{\text{Ähnlichkeit}} + \alpha \underbrace{\left(\frac{du}{dx} \right)^2}_{\text{Glattheit}} \right] dx$$

Das Gewicht $\alpha > 0$ heißt **Regularisierungsparameter**. Es steuert die Glattheit der Lösung. Je größer α ist desto stärker werden Abweichungen von der Glattheit bestraft, d.h. desto glatter ist die Lösung u .

27.2 Ein diskretes Beispiel

Das Signal aus 27.1.b soll diskret vorliegen:

$$f_0, f_1, \dots, f_N \text{ mit } f_i = f(ih), \quad h := \frac{1}{N}, \quad i = 0, \dots, N$$

Gesucht ist ein gefiltertes diskretes Signal $u_0, u_1, \dots, u_N$, das die (skalare) Funktion (mehrerer Variablen)

$$E(u_0, u_1, \dots, u_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (u_i - f_i)^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^2$$

Notwendige Bedingung für ein Minimum:

$$0 = \left(\frac{\partial E}{\partial u_0}, \frac{\partial E}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial E}{\partial u_N} \right)^T$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial E}{\partial u_0} = (u_0 - f_0) - \alpha \left(\frac{u_1 - u_0}{h^2} \right) \\
(*) \quad 0 &= \frac{\partial E}{\partial u_i} = (u_i - f_i) - \alpha \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h^2} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h^2} \right) \quad (i = 1, \dots, N-1) \\
0 &= \frac{\partial E}{\partial u_N} = (u_N - f_N) - \alpha \left(-\frac{u_N - u_{N-1}}{h^2} \right)
\end{aligned}$$

$u_0, \dots, u_N$ muss ein lineares Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{\alpha}{h^2} & -\frac{\alpha}{h^2} & \mathbf{0} \\ -\frac{\alpha}{h^2} & 1+\frac{2\alpha}{h^2} & -\frac{\alpha}{h^2} \\ \mathbf{0} & -\frac{\alpha}{h^2} & 1+\frac{2\alpha}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Wegen $\frac{u_{i+1}-u_i}{h^2} - \frac{u_i-u_{i-1}}{h^2} = \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + O(h^2)$

sieht (*) aus wie eine diskrete Form von

$$0 = (u - f) - \alpha \frac{d^2 u}{dx^2}$$

Kann man zeigen, dass diese Differentialgleichung direkt aus dem kontinuierlichen Minimierungsproblem

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(u - f)^2 + \alpha \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx$$

folgt?

Satz 27.3 (Euler-Lagrange-Gleichung)

Jede Lösung des Variationsproblems

Gesucht ist eine glatte Funktion $u(x)$, $x \in [a, b]$, die das Funktional

$$E(u) := \int_a^b F(x, u, u_x) dx \text{ minimiert und die Randbedingungen } u(a) = \alpha, u(b) = \beta \text{ erfüllt.}$$

ist zugleich eine Lösung der so genannten Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = F_u - \frac{d}{dx} F_{ux}$$

mit den Randbedingungen $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$.

Beweis:

Wir nehmen an, dass $u_0(x)$ eine hinreichend oft differenzierbare Lösung des Variationsproblems ist und betten $u_0(x)$ in eine Schar von Konkurrenzfunktionen

$$u(x, \varepsilon) := u_0(x) + \varepsilon h(x) \text{ mit } h(a) = 0 = h(b) \text{ ein.}$$

Da $u_0(x)$ das Integral $E(u)$ minimiert, besitzt

$$g(\varepsilon) = E(u(x, \varepsilon)) = E(u_0 + \varepsilon h)$$

in $\varepsilon = 0$ ein Minimum. Somit gilt notwendigerweise

$$\begin{aligned} 0 &= g'(0) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} E(u_0 + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, u_0 + \varepsilon h, u_{0x} + \varepsilon h_x) dx \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b [F_u(x, u_0, u_{0x})h(x) + F_{ux}(x, u_0, u_{0x})h(x)] dx \quad \text{Kettenregel} \end{aligned}$$

Mit der partiellen Integration

$$\int_a^b F_{ux}(x, u_0, u_{0x})h(x) dx = \underbrace{F_{ux}(x, u_0, u_{0x})h(x) \Big|_a^b}_{=0, \text{ da } h(b)=0=h(a)} - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{ux}(x, u_0, u_{0x})h(x) dx$$

folgt

$$0 = \int_a^b \left(F_u(x, u_0, u_{0x}) - \frac{d}{dx} F_{ux}(x, u_0, u_{0x}) \right) h(x) dx$$

für beliebige $h(x)$, die ausreichend glatt sind.

$$\Rightarrow 0 = F_u(x, u_0, u_{0x}) - \frac{d}{dx} F_{ux}(x, u_0, u_{0x}) \quad \text{q.e.d.}$$

27.4 Erweiterungen von Satz 27.3

Folgendes kann man zeigen:

a) **Keine Randbedingungen:**

Hat das Variationsproblem keine expliziten Randbedingungen, so besitzt die Euler-Lagrange-Gleichung die „natürlichen“ Randbedingungen

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_a = 0 = \left. \frac{du}{dx} \right|_b$$

b) **Funktionen mehrerer Variablen:**

Die Variationsgleichung

$$E(u) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} F(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx$$

entspricht der Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = F_u - \frac{\partial}{\partial x_1} F_{ux_1} - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} F_{ux_n}$$

c) **Höhere Ableitungen:**

$$E(u) = \int_a^b F(x, u, u_x, u_{xx}, \dots) dx$$

$$\text{führt auf } 0 = F_u - \frac{d}{dx} F_{ux} + \frac{d^2}{dx^2} F_{uxx} - + \dots$$

d) **Vektorwertige Funktionen:**

$$E(u_1, \dots, u_m) = \int_a^b F(x, u_1, \dots, u_m, u_{1x}, \dots, u_{mx}) dx$$

führt auf mehrere Euler-Lagrange-Gleichungen

$$0 = F_{u_1} - \frac{d}{dx} F_{u_{1x}}$$

$$\vdots$$

$$0 = F_{u_m} - \frac{d}{dx} F_{u_{mx}}$$

27.5 Beispiel

Wendet man 27.4.a auf das Beispiel 27.1.b an, folgt aus

$$F(x, u, u_x) = \frac{1}{2}(u - f)^2 + \frac{\alpha}{2} u_x^2$$

$$F_u = u - f$$

$$F_{ux} = \alpha u_x$$

die Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = F_u - \frac{d}{dx} F_{ux} = u - f - \alpha u_{xx}$$

wie in 27.2 vermutet. Die Diskretisierung in 27.2 stellt ein praktische Lösungsverfahren für diese Differentialgleichung dar.