

## §26 Extrema mit Nebenbedingungen

### 26.1 Motivation

In §24 haben wir Kriterien kennen gelernt, um lokale Extrema einer skalaren Funktion mehrerer Variablen zu bestimmen.

Häufig sucht man jedoch Extrema einer Funktion unter der Einschränkung, dass bestimmte Nebenbedingungen erfüllt sein müssen.

### 26.2 Beispiel: „Verpackungsminimierung“ im $\mathbb{R}^2$

Gesucht ist ein Rechteck maximalen Inhalts bei einem vorgegebenen Umfang  $u$ .

D.h. maximiere  $f(x, y) = xy$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 2x + 2y - u = 0$ .

#### Lösungsmöglichkeit 1 (spezieller)

Löse die Nebenbedingung nach einer Variable auf:

$$2y = u - 2x \Rightarrow y = \frac{u}{2} - x$$

Setze dies in  $f(x, y) = xy$  ein. Damit lautet das neue Maximierungsproblem:

$$\text{maximiere } \tilde{f}(x) = x \left( \frac{u}{2} - x \right) = \frac{1}{2}xu - x^2$$

Notwendige Bedingung für ein Maximum:

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{f}'(x) = \frac{1}{2}u - 2x \Rightarrow x = \frac{u}{4} \\ &\Rightarrow y = \frac{u}{2} - x = \frac{u}{4} \end{aligned}$$

Da  $\tilde{f}''\left(\frac{u}{4}\right) = -2 < 0$ , handelt es sich tatsächlich um ein Maximum.

#### Bemerkung:

Diese Lösungsmöglichkeit setzt voraus, dass wir die Nebenbedingung nach einer Variable auflösen können. Falls dies nicht möglich ist oder umständlich erscheint, bietet sich folgender Weg an:

#### Lösungsmöglichkeit 2 (allgemeiner)

Wir maximieren eine „erweiterte Zielfunktion“, in die die Nebenbedingung bereits eingebaut ist. Wir erhalten die Funktion

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= xy + \lambda(2x + 2y - u) \end{aligned}$$

mit einer zusätzlichen Variablen  $\lambda$  (**Lagrange-Multiplikator**).

Notwendige Bedingung für ein Maximum ist

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2\lambda \\ x + 2\lambda \\ 2x + 2y - u \end{pmatrix}$$

Beachte: Die dritte Gleichung drückt die Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  aus.

Auflösung der 1. und 2. Gleichung nach  $\lambda$ :

$$\left. \begin{array}{l} y = -2\lambda \\ x = -2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow x = y$$

Einsetzen in die 3. Gleichung:

$$4x - u = 0 \Rightarrow x = \frac{u}{4} = y.$$

## 26.3 Allgemeine Vorgehensweise

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir suchen Extrema von  $f(x_1, \dots, x_n)$  unter den  $m$  Nebenbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} g(x) = 0$$

mit  $m < n$ .

Statt der  $m$  Nebenbedingungen  $g(x) = 0$  führen wir  $m$  zusätzliche Variablen  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T =: \lambda$  ein (so genannte **Lagrange-Multiplikatoren**) und minimieren / maximieren statt  $f(x)$  die **Lagrange-Funktion**

$$F(x) = f(x) + \lambda^T g(x).$$

Damit haben wir ein Extremalproblem mit  $n$  Variablen und  $m$  Nebenbedingungen in ein Extremalproblem mit  $n + m$  Variablen ohne explizite Nebenbedingungen umgewandelt.

## 26.4 Bemerkungen

a) Man kann zeigen, dass der Ansatz 26.3 funktioniert:

Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und seien  $f, g_1, \dots, g_m: D \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$ -Funktionen. Ferner sei  $\xi \in D$  ein lokales Extremum von  $f(x)$  unter der Nebenbedingung  $g(x) = 0$  und es gelte die Regularitätsbedingung  $\text{rang}(Jg(\xi)) = m$ .

Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , so dass die Lagrange-Funktion  $F(x) = f(x) + \lambda^T g(x)$  in  $\xi$  die notwendige Bedingung  $\nabla^T F(\xi) = 0$  erfüllt.

- b) Ist die Nebenbedingungs Menge  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$  kompakt (beschränkt und abgeschlossen), so hat  $f(x)$  auf  $M$  ein globales Minimum und Maximum. Der kleinste / größte Wert von  $f(x)$ , den man mit dem Verfahren 26.3 findet, ist dieses globale Minimum / Maximum.

## 26.5 Beispiel

Sei  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  symmetrisch. Bestimme die Extrema der quadratischen Form  $x^T A x$  unter der Nebenbedingung  $|x| = 1$ .

### Lösung:

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) &:= x^T A x + \lambda(1 - x^T x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \lambda \left( 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j - 2\lambda x_1 \\ \vdots \\ 2 \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j - 2\lambda x_n \\ 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}$$

(beachte  $\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j} x_i x_j a_{ij} = \sum_j x_j a_{kj} + \sum_i x_i \underbrace{a_{ik}}_{=a_{ki}} = 2 \sum_j a_{kj} x_j$ )

Die Gleichungen 1 bis  $n$  besagen, dass  $x$  Eigenvektor zu einem Eigenwert  $\lambda$  ist:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = \lambda x_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

d.h.  $Ax = \lambda x$ .

Die Gleichung  $n+1$  fordert, dass der Eigenvektor auf 1 normiert ist. Da die Nebenbedingungs Menge  $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$  kompakt ist, besitzt  $f(x) = x^T A x$  ein Maximum / Minimum auf  $M$ . Es ist der normierte Eigenvektor von  $A$  zum größten / kleinsten Eigenwert.

In der Informatik benötigt man dieses Resultat z.B. bei der Bewegungsanalyse in digitalen Bildfolgen.

## 26.6 Beispiel

Bestimme die Extrema der Funktion  $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$  auf dem Schnitt der Ebene  $x + y + z = 0$  mit der Kugeloberfläche  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Lösung:**

$$F(x, y, z) = 5x + y - 3z + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

Notwendige Bedingung:

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial \mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + \lambda + 2x\mu \\ 1 + \lambda + 2y\mu \\ -3 + \lambda + 2z\mu \\ x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Nach endlich vielen Umformungen sieht man, dass

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ in Verbindung mit } \lambda = 1 \text{ und } \mu = \mp 2\sqrt{2} \text{ dieses}$$

Gleichungssystem lösen.

Wegen  $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}$  und

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4\sqrt{2} \text{ folgt mit dem Kompaktheitsargument, dass } 4\sqrt{2} \text{ das}$$

Maximum und  $-4\sqrt{2}$  das Minimum von  $f$  unter den angegebenen Nebenbedingungen ist.