

§25 Die Umkehrfunktion

25.1 Motivation

Viele Ideen ließen sich bisher von Funktionen einer Variablen auf Funktionen mehrerer Variablen übertragen:

Differenzierbarkeit, Mittelwertsatz, Satz von Taylor, Extrema von Funktionen.

Wir wollen nun den Begriff der Umkehrbarkeit einer Funktion verallgemeinern.

Zur Erinnerung das Resultat für skalarwertige Funktionen einer Variablen: Eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich lokal invertieren (nämlich in einer Umgebung, in der f streng monoton ist): Ist $f'(\xi) \neq 0$, existiert in einer Umgebung von $\eta = f(\xi)$ eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ und $g'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$.

Für vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen kann man folgendes Resultat zeigen:

Satz 25.2 (Umkehrsatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\xi \in D$. Ist die Jacobi-Matrix $Jf(\xi)$ invertierbar, so ist f lokal invertierbar: Es gibt offene Umgebungen U_1 von ξ und U_2 von $\eta = f(\xi)$, so dass f die Menge U_1 bijektiv auf U_2 abbildet. Die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$ ist stetig differenzierbar, und es gilt:

$$Jg(\eta) = (Jf(\xi))^{-1}$$

Beweisidee:

Das letzte Resultat ($Jg(\eta) = (Jf(\xi))^{-1}$) folgt aus $g \circ f = \text{id}_{U_1}$ (identische Abbildung auf U_1).

Mit Hilfe der Kettenregel gilt dann:

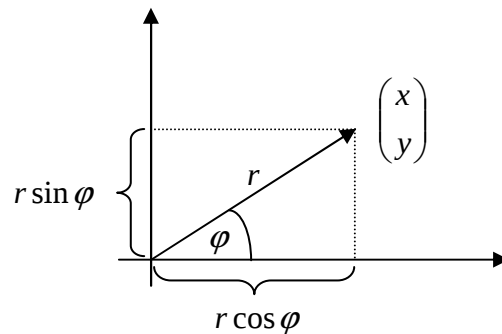
$$Jg(\eta) \cdot Jf(\xi) = I \Rightarrow Jg(\eta) = (Jf(\xi))^{-1}.$$

Die lokale Existenz einer stetig differenzierbaren Umkehrfunktion erfordert ein aufwendiges Resultat, das wir hier nicht durchnehmen (Satz über implizierte Funktionen).

25.3 Bemerkungen

- Wegen der Umkehrbarkeit müssen sowohl Definitionsbereich als auch Wertebereich im $\mathbb{R}^n$ liegen.
- Bijektive C^1 -Funktion, deren Umkehrung ebenfalls C^1 -Abbildungen sind, heißen auch **C^1 -Diffeomorphismen**.
- Der Umkehrsatz besagt, dass C^1 -Funktionen mit regulärer Jacobi-Matrix lokal umkehrbar sind.
Solche Abbildungen werden in den Anwendungen oft als Koordinatentransformationen verwendet.

25.4 Beispiel: Polarkoordinaten



Ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann man auch durch seinen Abstand r zum Ursprung und seinem Winkel φ zur x -Achse beschreiben.

Die Funktion $f : (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

hat die Jacobi-Matrix

$$Jf(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Da $\det(Jf(r, \varphi)) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r > 0$ ist, ist f auf $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ lokal invertierbar. Für $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ lautet die Umkehrfunktion

$$g = f^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Sie hat die Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} Jg(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{r \cos \varphi}{r} & \frac{r \sin \varphi}{r} \\ \frac{-r \sin \varphi}{r^2} & \frac{r \cos \varphi}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Jg \cdot Jf = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & -r \sin \varphi \cos \varphi + r \sin \varphi \cos \varphi \\ -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. $Jg = (Jf)^{-1}$

Beachte: f ist nicht global umkehrbar, da $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2k\pi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.