

§24 Das Newton-Verfahren

24.1 Motivation

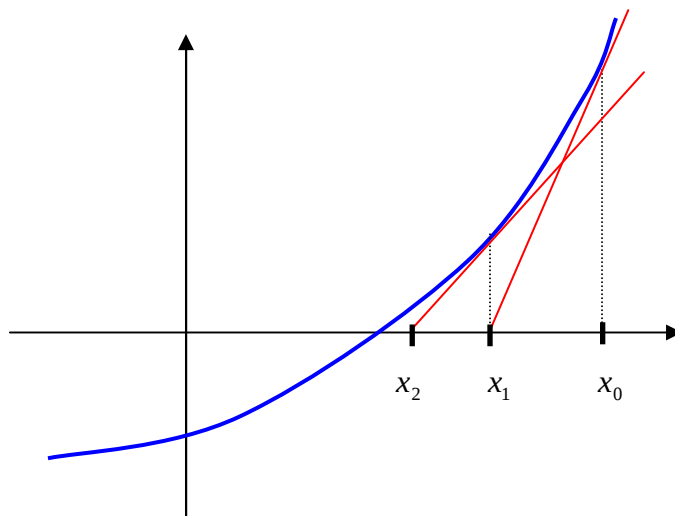
In §23 haben wir gesehen, dass die Bestimmung der stationären Punkte auf ein nichtlineares Gleichungssystem führt. Es ist oft nur numerisch lösbar.

Viele andere Probleme führen ebenfalls auf nichtlineare Gleichungen, z.B. die Bestimmung der Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Das Newton-Verfahren ist eine iterative Methode zur Lösung einer nichtlinearen Gleichung bzw. eines nichtlinearen Gleichungssystems. Es beruht auf einer Taylorapproximation 1. Grades (Linearisierung) und konvergiert sehr schnell, falls es konvergiert.

24.2 Newton-Verfahren für eine einzelne nichtlineare Gleichung

Wir betrachten eine skalare C^1 -Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einer Variablen und suchen eine Nullstelle: $f(x) = 0$.



Man beginnt mit einem Startwert x_0 , ersetzt $f(x)$ durch die **Tangente** in x_0 , nimmt deren Nullstelle als neuen Startwert x_1 , usw.

Tangente in x_0 : $T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$
Taylorpolynom 1. Grades

$x_1 :=$ Nullstelle von $T_1(x)$: $0 = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

allgemeine Iterationsvorschrift:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

24.3 Beispiel

$f(x) = x^2 - 2$ hat die Nullstellen $\pm \sqrt{2} \approx \pm 1,4142136$.

Mit der Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$

und dem Startwert $x_0 := 1$ ergibt sich:

k	x_k
0	1,0000000
1	1,5000000
2	1,4166667
3	1,4142157
4	1,4142136

24.4 Bemerkungen

- a) Im Allgemeinen konvergiert das Newton-Verfahren erst, wenn der Startwert x_0 „hinreichend nahe“ an einer Nullstelle liegt (**lokale Konvergenz**). In einigen Spezialfällen kann man auch Konvergenz für alle Startwerte zeigen (**globale Konvergenz**).
- b) Falls das Newton-Verfahren lokal konvergiert, liegt i.A. **quadratische Konvergenz** vor, d.h. für $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = s$:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - s|}{|x_k - s|^2} = c \text{ mit } c > 0$$

Experimentell beobachtet man daher oft, dass sich die Zahl der gültigen Stellen in jedem Iterationsschritt verdoppelt.

- c) Manchmal ist die Auswertung von $f'(x_k)$ sehr aufwendig. Dann verwendet man gerne das **vereinfachte Newton-Verfahren**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$\uparrow$
 statt x_k

Dessen Konvergenzrate ist jedoch nur noch linear: Es existiert ein c mit $0 < c < 1$ und

$$\limsup_{x_k \rightarrow s} \frac{|x_{k+1} - s|}{|x_k - s|} = c.$$

Oft ist jedoch c so klein, dass die Konvergenz trotzdem recht schnell ist.

24.5 Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige C^1 -Funktion mehrerer Variablen. Gesucht ist eine Nullstelle von f .

Wir haben also n nichtlineare Gleichungen mit n Unbekannten. Approximiert man die i -te Komponente von f durch ein Taylorpolynom 1. Grades um einen Punkt x_0 , erhält man

$$T_{1,i}(x) = f_i(x_0) + \nabla^T f_i(x_0)(x - x_0).$$

Da $\nabla^T f_i(x_0)$ die i -te Zeile der Jacobi-Matrix $Jf(x_0)$ ist, gilt in Vektorschreibweise

$$T_1(x) = f(x_0) + Jf(x_0)(x - x_0).$$

Die Nullstelle x_1 dieser Linearisierung ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Jf(x_0)(x_1 - x_0) = -f(x_0)$$

Die entsprechenden Newton-Iterationen lauten

$$\boxed{\begin{aligned} Jf(x_k)u_{k+1} &= -f(x_k) \\ x_{k+1} &= u_{k+1} + x_k \end{aligned}} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Man ersetzt also ein nichtlineares Gleichungssystem durch eine Sequenz linearer Gleichungssysteme.

24.6 Beispiele

Gesucht sei die Lösung der nichtlinearen Gleichungen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 0,6y - 0,16 = 0$$

$$g(x, y) = x^2 - y^2 + x - 1,6y - 0,14 = 0$$

Mit $f_x = 2x$, $f_y = 2y + 0,6$, $g_x = 2x + 1$, $g_y = -2y - 1,6$ lautet die Jacobi-Matrix im Startwert $x_0 = 0,6$, $y_0 = 0,25$

$$\begin{pmatrix} 1,2 & 1,1 \\ 2,2 & -2,1 \end{pmatrix}$$

Mit $f(0.6, 0.25) = 0,4125$ und $g(0.6, 0.25) = 0,3575$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1,2 & 1,1 \\ 2,2 & -2,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4125 \\ -0,3575 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $u_1 = -0,254960$ und $v_1 = -0,096862$.

Damit erhält man:

$$x_1 = u_1 + x_0 = 0,345040$$

$$y_1 = v_1 + y_0 = 0,153138$$

Mit weiteren Newton-Iterationen erhält man bei 7-stelliger Rechengenauigkeit:

k	x_k	y_k
0	0,600000	0,250000
1	0,345040	0,153138
2	0,277531	0,122463
3	0,271885	0,119664
4	0,271885	0,119643
5	0,271885	0,119643

24.7 Bemerkungen

- a) Berechnet man die Jacobi-Matrix nur im 1.Schritt, ergibt sich das **vereinfachte Newton-Verfahren**

$$\boxed{\begin{aligned} Jf(x_0)u_{k+1} &= -f(x_k) \\ x_{k+1} &= u_{k+1} + x_k \end{aligned}} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

mit langsamer Konvergenz. Im Beispiel 24.6 würde man 27 vereinfachte Newton-Iterationen benötigen, um die Genauigkeit von 5 echten Newton-Iterationen zu erreichen. Allerdings lassen sich im vereinfachten Newton-Verfahren die linearen Gleichungssysteme ohne großen Aufwand lösen:

Hat man $Jf(x_0)$ in eine obere Dreiecksmatrix R und eine untere Dreiecksmatrix L faktorisiert, erfordern die weiteren Iterationen nur noch das Auflösen dieser LR -Zerlegung durch Vorwärts- bzw. Rückwärtssubstitution.

- b) Will man große, dünn besetzte nichtlineare Gleichungssysteme lösen, kann man das Newton-Verfahren mit iterativen Methoden für lineare Gleichungssysteme koppeln. So entstehen z.B. SOR-Newton-Verfahren.
- c) Formal lässt sich das vektorielle Newton-Verfahren ähnlich wie das skalare Newton-Verfahren schreiben:

$$x_{k+1} = x_k - (Jf(x_k))^{-1} f(x_k)$$

Diese Schreibweise hat aber keine algorithmische Bedeutung.