

§23 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen

23.1 Motivation

Bei skalarwertigen Funktionen einer Variablen kennen wir notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von Extrema:

- a) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion. Besitzt f in $\xi \in (a, b)$ ein lokales Extremum, ist $f'(\xi) = 0$.
- b) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, $\xi \in (a, b)$, $f'(\xi) = 0$. Ist ξ ein lokales Minimum (bzw. lokales Maximum), dann gilt $f''(\xi) \geq 0$ (bzw. ≤ 0). Ist umgekehrt $f''(\xi) > 0$ (bzw. $f''(\xi) < 0$), so ist ξ ein striktes Minimum (bzw. striktes Maximum).

Gelten ähnliche Aussagen auch im Fall skalarwertiger Funktionen mehrerer Variablen? Hierzu benötigen wir

Definition 23.2

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Ein Punkt $\xi \in D$ heißt **lokales Minimum** (bzw. **lokales Maximum**), falls eine Umgebung $U \subset D$ von ξ existiert mit $f(y) \geq f(\xi)$ (bzw. $f(y) \leq f(\xi)$) für alle $y \in U$. Tritt Gleichheit nur für $y = \xi$ auf, heißt ξ **striktes lokales Minimum** (bzw. **striktes lokales Maximum**).

Damit lautet das Analogon zu 23.1.a:

Satz 23.3 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion.

Hat f in $\xi \in D$ ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum), so gilt $\nabla f(\xi) = 0$.

Beweis:

Für beliebiges $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ ist $\varphi(t) := f(\xi + tv)$ in einer Umgebung von $t = 0$ erklärt und dort stetig differenzierbar.

Ferner hat φ in $t = 0$ ein lokales Extremum.

Mit 23.1.a und der Kettenregel 20.4 gilt:

$$0 = \overset{23.1.a}{\varphi'(0)} = \overset{20.4}{\nabla^T f(\xi)} v$$

Da $v \neq 0$ beliebig war, folgt $\nabla^T f(\xi) = 0$.

q.e.d

23.4 Bemerkungen

- a) Ein Punkt $\xi \in D$ mit $\nabla f(\xi) = 0$ heißt auch **stationärer Punkt** von f .
- b) Will man die stationären Punkte finden, muss man häufig ein nichtlineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten lösen. Ein numerisches Verfahren hierzu folgt in einer späteren Vorlesung.

Beispiel:

$$f(x, y) = e^{xy} + x^2 \sin y$$

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy} + 2x \sin y \\ xe^{xy} + x^2 \cos y \end{pmatrix}$$

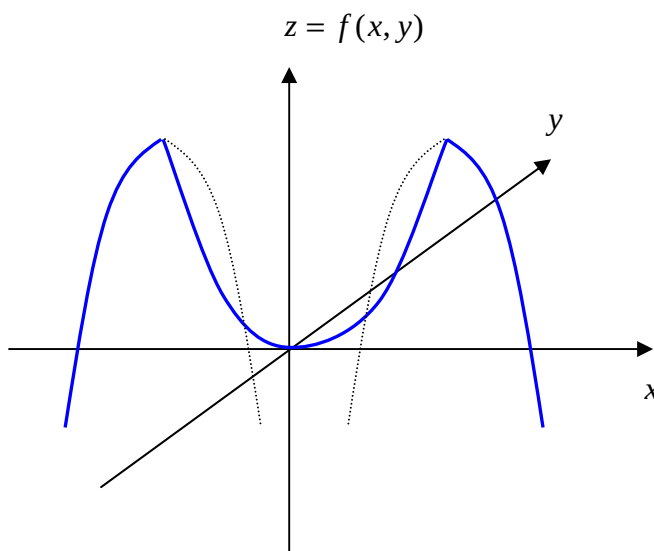
2 nichtlineare Gleichungen mit 2 Unbekannten.

- c) Nicht jeder stationäre Punkt ist ein Extremum!

Beispiel:

Die stationären Punkte von $f(x, y) = x^2 - y^2$ erfüllen $0 = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist einziger stationärer Punkt.

Allerdings ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Sattelpunkt von $f(x, y)$



Zur Klassifikation stationärer Punkte betrachten wir das Analogon zu 23.1.b:

Satz 23.5 (Klassifikation stationärer Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und $\xi \in D$ sowie $\nabla f(\xi) = 0$. Dann gilt:

a) **Notwendige Bedingung:**

Ist ξ ein lokales Minimum (bzw. lokales Maximum) von f , so ist die Hesse-Matrix $Hf(\xi)$ positiv semidefinit (bzw. negativ semidefinit).

b) **Hinreichende Bedingung:**

- i) Ist $Hf(\xi)$ positiv definit (bzw. negativ definit), so ist ξ ein striktes lokales Minimum (bzw. striktes lokales Maximum).
- ii) Ist $Hf(\xi)$ indefinit, so ist ξ ein **Sattelpunkt** (ein stationärer Punkt, für den in jeder Umgebung um ξ Punkte y und z existieren mit $f(y) < f(\xi) < f(z)$).

Beweis:

- a) Sei o.B.d.A. ξ ein lokales Minimum. Für $v \neq 0$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt nach dem Satz von Taylor (vgl. 21.6):

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lokales} \\ \text{Minimum}}}{\leq} f(\xi + \varepsilon v) - f(\xi) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor}}}{=} \nabla^T f(\xi) \varepsilon v + \frac{1}{2} (\varepsilon v)^T Hf(\xi + \Theta \varepsilon v) \varepsilon v \quad \text{mit } \Theta \in (0,1)$$

Also ist $v^T Hf(\xi + \Theta \varepsilon v) v \geq 0$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt $v^T Hf(\xi) v \geq 0$. Da v beliebig war, ist $Hf(\xi)$ positiv semidefinit.

- b) i) Sei $Hf(\xi)$ positiv definit. Da f eine C^2 -Funktion ist, ist $Hf(x)$ auch in einer hinreichend kleinen Kreisumgebung $K_\varepsilon(\xi)$ mit Mittelpunkt ξ und Radius ε positiv definit.

Für $x \in K_\varepsilon(\xi) - \{\xi\}$ gilt nach dem Satz von Taylor:

$$f(x) - f(\xi) = \underbrace{\nabla^T f(\xi)(x - \xi)}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{(x - \xi)^T Hf(\xi + \Theta(x - \xi))(x - \xi)}_{>0}$$

Da $x \in K_\varepsilon(\xi) - \{\xi\}$ beliebig gewählt war, folgt aus $f(x) - f(\xi) > 0$, dass ξ ein striktes Minimum ist.

- b) ii) Sei nun $Hf(\xi)$ indefinit. Dann existieren Eigenwerte $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$ von $Hf(\xi)$. Für die entsprechenden Eigenvektoren v, w gilt also:

$$v^T Hf(\xi) v > 0$$

$$w^T Hf(\xi) w < 0$$

Wie in (a) zeigt man nun, dass es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ gibt mit

$$f(\xi + \varepsilon v) - f(\xi) = \frac{1}{2} (\varepsilon v)^T Hf(\xi + \Theta_1 \varepsilon v) \varepsilon v > 0 \quad , \quad \Theta_1 \in (0,1)$$

$$f(\xi + \varepsilon w) - f(\xi) = \frac{1}{2} (\varepsilon w)^T Hf(\xi + \Theta_2 \varepsilon w) \varepsilon w < 0 \quad , \quad \Theta_2 \in (0,1)$$

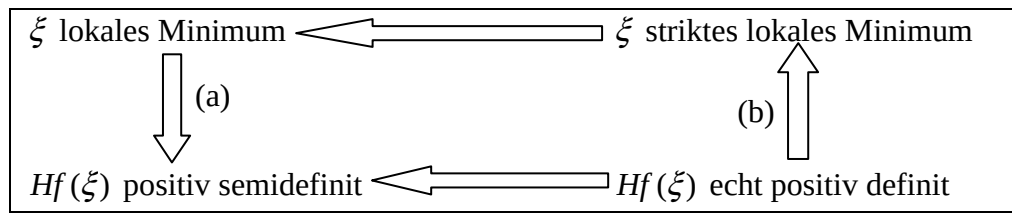
für alle $\varepsilon \in (0, \min\{\Theta_1, \Theta_2\})$.

Somit ist ξ Sattelpunkt von f .

q.e.d.

Bemerkung:

Nach Satz 23.5 gilt also:



Keine dieser Implikationen ist umkehrbar.

23.6 Beispiel

$$f(x, y) = y^2(x-1) + x^2(x+1)$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3x^2 + 2x \\ 2y(x-1) \end{pmatrix}$$

Stationäre Punkte:

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla f(x, y) \Rightarrow 2y(x-1) = 0$$

Fall 1: $x-1=0 \Rightarrow x=1$

Einsetzen in $y^2 + 3x^2 + 2x = 0$ liefert $y^2 + 5 = 0$.

Keine Lösung in $\mathbb{R}$

Fall 2: $y = 0$

Einsetzen in $y^2 + 3x^2 + 2x = 0$ ergibt

$$3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(3x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{2}{3}$$

2 stationäre Punkte: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

Klassifikation:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 2y \\ 2y & 6x+2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$Hf\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \text{ negativ definit} \Rightarrow \text{striktes lokales Maximum}$$