

## §22 Numerische Differentiation

### 22.1 Motivation

In viele Anwendungen muss man Ableitungen annähern von Funktionen, die nur diskret (d.h. an endlich vielen Punkten) vorliegen.

Beispiele:

- a) Geschwindigkeitsmessung durch die Polizei
- b) Temperaturänderungen an einer Messstation
- c) Scannen von Personen mit einem 3D-Scanner

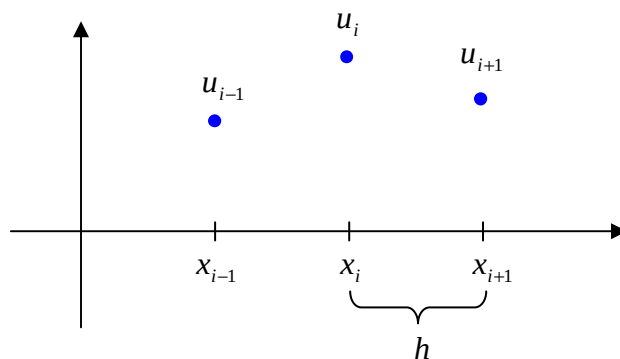
Zur Bestimmung von geeigneten numerischen Approximationsformeln und deren Genauigkeit wird der Satz von Taylor angewandt.

### 22.2 Prinzipielle Vorgehensweise

(zunächst für Funktionen einer Variablen)

#### Annahme:

Von einer kontinuierlichen Funktion  $u(x)$ , die hinreichend oft differenzierbar ist, sind nur die Funktionswerte auf einem äquidistanten Gitter  $\Gamma := \{x_i \mid x_i = i \cdot h, i \in \mathbb{Z}\}$  bekannt:



$$u_i = u(x_i), \quad i \in \mathbb{Z}$$

$h$  heißt **Gitterweite** von  $\Gamma$ .

#### Gesucht:

Approximation an die  $k$ -te Ableitung  $u^{(k)}$  an der Stelle  $\xi$  (die nicht unbedingt auf dem Gitter liegen muss)

#### Beispiel:

$u''$  soll im Punkt  $x_i$  durch 3 Messwerte  $u_{i-1}, u_i, u_{i+1}$  approximiert werden.

**Lösung:**

Wir fordern  $u_i'' \approx \alpha_{i-1}u_{i-1} + \alpha_i u_i + \alpha_{i+1}u_{i+1}$ .

Mit der Taylorentwicklung um  $x_i$  folgt:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{i-1}u_{i-1} + \alpha_i u_i + \alpha_{i+1}u_{i+1} \\
 &= \alpha_{i-1} \left( u_i - hu_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'' + O(h^3) \right) \\
 & \quad + \alpha_i u_i \\
 & \quad + \alpha_{i+1} \left( u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'' + O(h^3) \right) \\
 &= u_i (\alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1}) + u_i' (-h\alpha_{i-1} + h\alpha_{i+1}) + u_i'' \left( \frac{h^2}{2} \alpha_{i-1} + \frac{h^2}{2} \alpha_{i+1} \right) + O(h^3)
 \end{aligned}$$

Da dies mit  $u_i'' = 0u_i + 0u_i' + 1u_i''$  übereinstimmen soll, ergibt ein Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem:

$$\alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1} = 0 \quad (\text{i})$$

$$-h\alpha_{i-1} + h\alpha_{i+1} = 0 \quad (\text{ii})$$

$$\frac{h^2}{2} \alpha_{i-1} + \frac{h^2}{2} \alpha_{i+1} = 1 \quad (\text{iii})$$

$$\text{Aus (ii)} \quad \Rightarrow \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1}$$

$$\text{In (iii)} \quad \Rightarrow h^2 \alpha_{i-1} = 1 \quad \Rightarrow \alpha_{i-1} = \frac{1}{h^2} = \alpha_{i+1}$$

$$\text{In (i)} \quad \Rightarrow \alpha_i = -\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1} = -\frac{2}{h^2}$$

Also gilt: 
$$u_i'' \approx \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

Wie genau ist diese Approximation?

Mit der ausführlichen Taylorentwicklung

$$u_{i\pm 1} = u_i \pm hu_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'' \pm \frac{1}{6}h^3 u_i''' + \frac{1}{24}h^4 u_i^{(4)} \pm \frac{1}{120}h^5 u_i^{(5)} + \frac{1}{720}h^6 u_i^{(6)} + O(h^7)$$

folgt durch Einsetzen:

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = u_i'' + \underbrace{\frac{1}{12}h^2 u_i^{(4)}}_{\text{führender Fehlerterm}} + O(h^5) = u_i'' + O(h^2)$$

Der führende Fehlerterm hat die Ordnung  $O(h^2)$ . Man sagt, die Approximation hat die Konsistenzordnung  $O(h^2)$ .

## 22.3 Anmerkungen

- a) Die Konsistenzordnung hängt vom Entwicklungspunkt ab.

Beispiel: Approximiert man mit  $u_i, u_{i+1}$  den Wert  $u_i'$ , so folgt aus einer Taylorentwicklung um  $x_i$ :

$$u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{1}{2}h^2u_i'' + O(h^3)$$

die Approximation der Ordnung  $O(h)$

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{1}{2}hu_i'' + O(h^2)$$

Entwickelt man  $u_i, u_{i+1}$  jedoch um  $x_{i+1/2}$ :

$$u_{i+1} = u_{i+1/2} + \frac{h}{2}u_{i+1/2}' + \frac{1}{2}\frac{h^2}{4}u_{i+1/2}'' + \frac{1}{6}\frac{h^3}{8}u_{i+1/2}''' + \frac{1}{24}\frac{h^4}{16}u_{i+1/2}^{(4)} + O(h^5)$$

$$u_i = u_{i+1/2} - \frac{h}{2}u_{i+1/2}' + \frac{1}{2}\frac{h^2}{4}u_{i+1/2}'' - \frac{1}{6}\frac{h^3}{8}u_{i+1/2}''' + \frac{1}{24}\frac{h^4}{16}u_{i+1/2}^{(4)} + O(h^5)$$

erhält man die Approximation der Ordnung  $O(h^2)$

$$u_{i+1/2}' = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \frac{h^2}{24}u_{i+1/2}''' + O(h^4)$$

- b) Durch Hinzunahme weiterer Gitterpunkte gelingt es oft, die Konsistenzordnung zu verbessern.

Beispiel: 
$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$u_i' = \frac{-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}}{12h} + O(h^4)$$

- c) Wichtige Approximationen  
erste Ableitung:

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h) \quad \text{Vorwärtsdifferenz}$$

$$u_i' = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h) \quad \text{Rückwärtsdifferenz}$$

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad \text{zentrale Differenz}$$

zweite Ableitung:

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

- d) Will man partielle Ableitungen einer Funktion mehrerer Variablen approximieren, benötigt man meist eine Taylorentwicklung in mehreren Variablen (vgl. Satz 21.4).

$$\text{z.B.} \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{4hk} [u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}] + O(h^2 + k^2)$$

mit  $u_{i,j} = u(hi, hj)$

Manchmal reicht auch eine eindimensionale Taylorentwicklung:

$$\text{z.B.} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(h^2 + k^2)$$

## 22.4 Anwendung auf die Diskretisierung von Differentialgleichungen

Ersetzt man die Ableitungen durch die besprochenen Differenzapproximationen, entstehen so genannte **Finite-Differenzen-Verfahren**.

### Beispiel:

Die eindimensionale Diffusionsgleichung (vgl. 19.13.c)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

soll mit einem einfachen Finite-Differenzen-Verfahren approximiert werden. Bezeichnet man mit  $u_i^k$  eine Approximation  $u(x, t)$  im Punkt  $(ih, k\tau)$ , verwendet man z.B. die Approximationen

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^k = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + O(\tau)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^k = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + O(h^2)$$

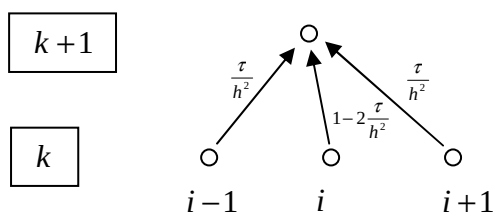
Damit lautet die Approximation

$$\frac{u_{i+1}^{k+1} - u_i^k}{\tau} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}$$

Kennt man die Funktionswerte zur Zeitschicht  $k = 0$ , kann man damit die unbekannten Werte der Schichten  $k = 1, 2, \dots$  iterativ berechnen.

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)$$

$$= \frac{\tau}{h^2} u_{i+1}^k + \left(1 - 2\frac{\tau}{h^2}\right) u_i^k + \frac{\tau}{h^2} u_{i-1}^k$$



$u_i^{k+1}$  entsteht also durch gewichtete Mittelung aus  $u_{i-1}^k, u_i^k, u_{i+1}^k$ .