

§21 Der Mittelwertsatz und der Satz von Taylor

Ab jetzt betrachten wir wieder skalarwertige Funktionen mehrerer Variablen. Wir wollen weitere Resultate von Funktionen einer Variable übertragen.

Gibt es einen vergleichbaren Mittelwertsatz?

Satz 21.1 (Mittelwertsatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf D . Ferner seien $a, b \in D$ Punkte in D , deren Verbindungsstrecke

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$$

ganz in D liegt.

Dann gibt es eine Zahl $\Theta \in (0, 1)$ mit

$$f(b) - f(a) = \nabla^T f(a + \Theta(b - a))(b - a).$$

Beweis:

Wir parametrisieren die Verbindungsstrecke $[a, b]$ so, dass wir den Mittelwertsatz einer Funktion einer Variablen anwenden können:

Setze $h(t) = f(a + t(b - a)) \quad t \in [0, 1]$

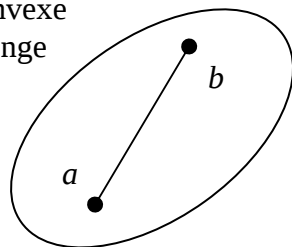
$h(t)$ ist stetig auf $[0, 1]$, und nach der Kettenregel auch differenzierbar auf $(0, 1)$. Somit sind die Voraussetzungen für den Mittelwertsatz einer Variablen erfüllt und es gilt:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= h(1) - h(0) = h'(\Theta)(1 - 0) && (0 < \Theta < 1) \\ &= \nabla^T f(a + \Theta(b - a))(b - a) && (\text{Kettenregel}) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

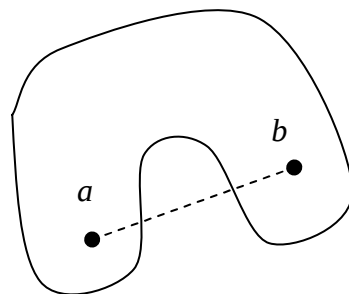
Bemerkung:

Gilt die Bedingung $[a, b] \subset D$ für alle Punkte $a, b \in D$, so heißt die Menge D konvex.

konvexe
Menge



nichtkonvexe
Menge



Bei konvexen Mengen gilt der Mittelwertsatz also für beliebige Punkte $a, b \in D$.

21.2 Beispiel

Sei $f(x, y) = \cos x + \sin y$, $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$.

Es gilt $f(0,0) = f(\pi/2, \pi/2) = 1$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\Theta \in (0,1)$ mit

$$\begin{aligned} 0 &= f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - f(0,0) = \nabla^T f\left(\Theta \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\Theta \pi/2) & \cos(\Theta \pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \\ &= \pi/2 (\cos(\Theta \pi/2) - \sin(\Theta \pi/2)) \end{aligned}$$

In der Tat ist diese Gleichung für $\Theta = \frac{1}{2}$ erfüllt.

21.3 Motivation zur Taylorentwicklung

Eine differenzierbare Funktion lässt sich lokal durch eine lineare Funktion (d.h. ein Polynom 1. Grades) approximieren.

Wir wollen nun eine m -fach differenzierbare Funktion durch ein Polynom m -ten Grades annähern. Dazu verallgemeinern wir den Satz von Taylor auf skalarwertige Funktionen mehrerer Variablen.

Zur Erinnerung der Satz von Taylor für skalarwertige Funktionen einer Variablen:

Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $\xi \in (a, b)$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine C^{m+1} -Funktion.

Dann gilt folgende Taylorentwicklung um den Punkt ξ :

$$f(x) = T_m(x, \xi) + R_m(x, \xi)$$

$$\text{mit } T_m(x, \xi) = \sum_{k=0}^m \frac{(x - \xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi) \quad \text{Taylorpolynom } m\text{-ten Grades}$$

$$R_m(x, \xi) = \frac{(x - \xi)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi + \Theta(x - \xi)) \quad (\text{mit } \Theta \in (0,1)) \text{ Restglied nach Lagrange}$$

Satz 21.4 (Satz von Taylor)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $\xi \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine (skalare) C^{m+1} -Funktion.

Dann gilt folgende Taylorentwicklung um ξ :

$$f(x) = T_m(x, \xi) + R_m(x, \xi)$$

mit $T_m(x, \xi) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} [(x - \xi)^T \nabla]^k f \Big|_{\xi}$ Taylorpolynom m -ten Grades

$$R_m(x, \xi) = \frac{1}{(m+1)!} [(x - \xi)^T \nabla]^{m+1} f \Big|_{\xi + \Theta(x - \xi)}$$
 Restglied nach Lagrange

Erläuterungen:

$$[(x - \xi)^T \nabla]^k = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \partial_{x_i} \right)^k$$

Dieser Ausdruck wird formal ausmultipliziert und nach den partiellen Ableitungen sortiert.

Beispiel für $n = 2$:

$$[(x - \xi)^T \nabla]^0 f \Big|_{\xi} = f(\xi)$$

$$[(x - \xi)^T \nabla]^1 f \Big|_{\xi} = (x_1 - \xi_1) f_{x_1}(\xi) + (x_2 - \xi_2) f_{x_2}(\xi)$$

$$\begin{aligned} [(x - \xi)^T \nabla]^2 f \Big|_{\xi} &= [(x_1 - \xi_1) \partial_{x_1} + (x_2 - \xi_2) \partial_{x_2}]^2 f \Big|_{\xi} \\ &= (x_1 - \xi_1)^2 f_{x_1 x_1}(\xi) + 2(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) f_{x_1 x_2}(\xi) + (x_2 - \xi_2)^2 f_{x_2 x_2}(\xi) \\ &= (x - \xi)^T H f(\xi) (x - \xi) \text{ mit Hesse-Matrix } H \end{aligned}$$

Beweis von Satz 21.4:

Wir verwenden eine Umparametrisierung, mit der sich der Satz von Taylor für Funktionen **einer** Variablen anwenden lässt:

$$\underbrace{\varphi(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Skalar}}} := f(\underbrace{\xi + t(x - \xi)}_{\substack{\in D \text{ für } -\varepsilon_1 < t < \varepsilon_2, \\ \text{da } D \text{ offen und} \\ \text{konvex}}})$$

Damit gilt:

$$(*) \quad \boxed{f(x) = \varphi(1) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\Theta)} \quad \text{mit } \Theta \in (0,1)$$

$$\varphi(t) = [(x - \xi)^T \nabla]^0 f \Big|_{\xi + t(x - \xi)} = f(\xi + t(x - \xi))$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi + t(x - \xi)) (x_i - \xi_i) \\ &= [(x - \xi)^T \nabla]^1 f \Big|_{\xi + t(x - \xi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= \sum_{i=1}^n \left[(x_i - \xi_i) \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\xi + t(x - \xi))(x_j - \xi_j) \right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i) \partial x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n (x_j - \xi_j) \partial x_j \right) f \Big|_{\xi + t(x - \xi)} \\
&= \left[(x - \xi)^T \nabla \right]^2 f \Big|_{\xi + t(x - \xi)}
\end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt: $\varphi^{(k)}(t) = \left[(x - \xi)^T \nabla \right]^k f \Big|_{\xi + t(x - \xi)}$.

Einsetzen in (*) liefert:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[(x - \xi)^T \nabla \right]^k f \Big|_{\xi} + \frac{1}{(m+1)!} \left[(x - \xi)^T \nabla \right]^{m+1} f \Big|_{\xi + \Theta(x - \xi)} \quad \text{q.e.d.}$$

21.5 Beispiel

Berechne das Taylorpolynom $T_2(x, \xi)$ zweiten Grades von $f(x, y, z) = xy^2 \sin z$ im

Entwicklungspunkt $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
T_2(x, \xi) &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} \left[(x - \xi)^T \nabla \right]^k f \Big|_{\xi} \\
&= f(\xi) + (x-1)f_x(\xi) + (y-2)f_y(\xi) + zf_z(\xi) + \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} &(x-1)^2 f_{xx}(\xi) + (y-2)^2 f_{yy}(\xi) + z^2 f_{zz}(\xi) \\ &+ 2(x-1)(y-2)f_{xy}(\xi) + 2(x-1)zf_{xz}(\xi) \\ &+ 2(y-2)zf_{yz}(\xi) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Ableitungen	Auswertung in $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
$f = xy^2 \sin z$	0
$f_x = y^2 \sin z$	0
$f_y = 2xy \sin z$	0
$f_z = xy^2 \cos z$	4
$f_{xx} = 0$	0
$f_{yy} = 2x \sin z$	0
$f_{zz} = -xy^2 \sin z$	0
$f_{xy} = 2y \sin z$	0
$f_{xz} = y^2 \cos z$	4
$f_{yz} = 2xy \cos z$	4

$$\begin{aligned}
 T_2(x, \xi) &= 4z + \frac{2}{2}(x-1)z \cdot 4 + \frac{1}{2}2(y-2)z \cdot 4 \\
 &= 4z + 4xz - 4z + 4yz - 8z \\
 &= -8z + 4xz + 4yz
 \end{aligned}$$

21.6 Bemerkungen

a) Für $m = 0$ liefert der Satz von Taylor:

$$f(x) = f(\xi) + (x - \xi)^T \nabla f(\xi + \Theta(x - \xi)) \text{ mit } \Theta \in (0,1)$$

Das ist äquivalent zum Mittelwertsatz 21.1 angewendet auf die beiden Punkte $a = \xi$, $b = x$.

$$f(x) - f(\xi) = \nabla^T f(\xi + \Theta(x - \xi))(x - \xi)$$

Der Mittelwertsatz ist also ein Spezialfall des Satzes von Taylor.

b) Mit Hilfe der Hessematrix $Hf = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$ lässt sich das Taylorpolynom

2. Grades schreiben als:

$$T_2(x, \xi) = f(\xi) + (x - \xi)^T \nabla f(\xi) + \frac{1}{2}(x - \xi)^T Hf(\xi)(x - \xi)$$

(vgl. Erläuterungen zu Satz 21.4)

- c) Da die partiellen Ableitungen der Ordnung $m+1$ auf einer kompakten Teilmenge von D beschränkt sind, hat das Restglied die Fehlerordnung $O(|x - \xi|^{m+1})$.

Somit folgt für die Approximationsgüte des Taylorpolynoms:

$$f(x) = T_m(x, \xi) + O(|x - \xi|^{m+1})$$

- d) Mit $h = x - \xi$ lautet eine Alternativschreibweise der Taylorentwicklung:

$$f(\xi + h) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (h^T \nabla)^k f \Big|_{\xi} + \frac{1}{(m+1)!} (h^T \nabla)^{m+1} f \Big|_{\xi + \Theta h} \quad \text{mit } \Theta \in (0,1)$$