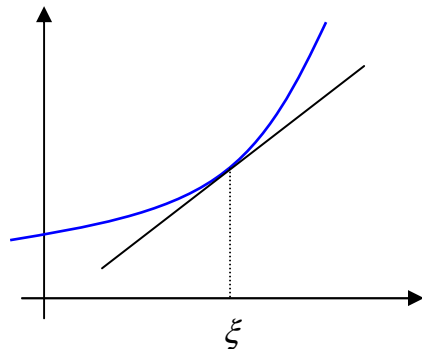


§20 Totale Differenzierbarkeit

20.1 Motivation

Für eine skalarwertige Funktion einer Variable $f(x)$ bedeutet Differenzierbarkeit in einem Punkt ξ , dass der Graph der Funktion eine Tangente besitzt mit der Steigung $f'(\xi)$.



$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Mit anderen Worten:

Die Funktion $f(x)$ wird in einer Umgebung von ξ gut durch die lineare Funktion $f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ approximiert, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - (f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi))}{x - \xi} = 0.$$

Wir wollen nun dieses Konzept auf vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen verallgemeinern.

Definition 20.2

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt in $\xi \in D$ **(total, vollständig) differenzierbar**, falls es eine lineare Abbildung $A(x - \xi) + f(\xi)$ mit $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ gibt mit

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - (A(x - \xi) + f(\xi))}{|x - \xi|} = 0.$$

Wie hängen totale und partielle Differenzierbarkeit zusammen?

Satz 20.3 (Partielle und totale Differenzierbarkeit)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

a) Totale Differenzierbarkeit impliziert die Stetigkeit:

Ist $f(x)$ in ξ differenzierbar, so ist $f(x)$ auch stetig in ξ (d.h. $f(x) \rightarrow f(\xi)$ für $x \rightarrow \xi$).

b) Totale Differenzierbarkeit impliziert partielle Differenzierbarkeit:

Ist $f(x)$ in ξ (total) differenzierbar, so ist $f(x)$ in ξ auch partiell differenzierbar.
Die zugehörige Matrix A der linearen Approximation ist identisch mit der Jacobi-Matrix

$$Jf(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix}$$

c) Stetige partielle Differenzierbarkeit impliziert totale Differenzierbarkeit:

Ist $f(x)$ eine C^1 -Funktion auf D , so ist $f(x)$ auf D auch (total) differenzierbar.

Beweis: Wir zeigen nur (a) und (b)

a) Ist $f(x)$ in ξ differenzierbar, gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - (A(x - \xi) + f(\xi))}{|x - \xi|} = 0.$$

Wegen der Stetigkeit der euklidischen Norm gilt daher:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)| = 0.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &= |f(x) - f(\xi) - A(x - \xi) + A(x - \xi)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)|}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \xi} + \underbrace{|A(x - \xi)|}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \xi} \\ &\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \xi \end{aligned}$$

Damit ist $f(x)$ in ξ stetig.

b) Mit den kanonischen Einheitsvektoren $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Stelle}$ und $x = \xi + he_j$ folgt aus

der totalen Differenzierbarkeit:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)}{|h|}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \xi} &= \frac{f(\xi + he_j) - f(\xi)}{|h|} - \frac{hAe_j}{|h|} \\ &= \frac{h}{|h|} \left(\frac{f(\xi + he_j) - f(\xi)}{h} - \underbrace{Ae_j}_{j\text{-te Spalte von } A} \right) \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + he_j) - f(\xi)}{h} &= Ae_j \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist partiell differenzierbar und $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}$.

Somit ist A die Jacobimatrix von f .

q.e.d.

Gelten ähnliche Differentiationsregeln wie bei skalarwertigen Funktionen einer Variablen?
Man kann zeigen:

Satz 20.4 (Differentiationsregeln)

a) **Linearität:**

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ seien differenzierbar in $\xi \in D$.

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist dann $\alpha f + \beta g$ in ξ differenzierbar und es gilt:

$$J(\alpha f + \beta g)(\xi) = \alpha Jf(\xi) + \beta Jg(\xi).$$

b) **Kettenregel:**

Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $\xi \in D$ differenzierbar und $g : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ in $f(\xi) \in E$ differenzierbar.

$$(\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k)$$

Dann ist die Hintereinanderausführung $g \circ f$ ebenfalls in ξ differenzierbar und es gilt:

$$J(g \circ f)(\xi) = Jg(f(\xi)) \cdot Jf(\xi)$$

Bemerkung:

Ein wichtiger Spezialfall dieser Kettenregel ergibt sich für $n = k = 1$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Wir betrachten also $(g \circ f)(x) = g(f_1(x), \dots, f_m(x))$

$$\Rightarrow (g \circ f)(\xi) = Jg(f(\xi)) \cdot Jf(\xi)$$

$$= \nabla^T g(f(\xi)) \begin{pmatrix} f_1'(\xi) \\ \vdots \\ f_m'(\xi) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(\xi)) \cdot f_k'(\xi)$$