

TEIL C: DIFFERENTIALRECHNUNG MEHRERER VARIABLEN

§19 Partielle Ableitungen

19.1 Motivation

Wir können eine skalarwertige Funktion einer Variablen ableiten

$$f'(\xi) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

Dieser Ableitungsbegriff ist auch anwendbar bei vektorwertigen Funktionen einer Variablen:
Für $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ definiert man (vgl. §5):

$$f'(\xi) := (f'_1(\xi), \dots, f'_n(\xi))^T$$

Wie aber differenziert man eine skalarwertige Funktion **mehrerer** Variablen, z.B.
 $f(x_1, x_2) = x_1^3 \cos x_2$?

Differenziert man nach einer Variablen und hält alle anderen fest, ergeben sich die so genannten partiellen Ableitungen.

Definition 19.2

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\xi \in D$.

a) Die Funktion $f(x)$ ist in ξ nach x_i **partiell differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h e_i) - f(\xi)}{h} \text{ existiert.}$$

Dabei ist e_i der i -te Einheitsvektor: $e_i := (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te} \\ \text{Stelle}}}{1}, 0, \dots, 0)^T$.

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$ heißt **partielle Ableitung** von $f(x)$ nach x_i im Punkt ξ .

b) Ist $f(x)$ in jedem beliebigen Punkt $\xi \in D$ partiell differenzierbar nach x_i , so heißt f auf D partiell differenzierbar nach x_i .

Trifft dies für alle Koordinaten x_i , $i = 1, \dots, n$ zu, so heißt f partiell differenzierbar auf D .

Sind ferner alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$ stetige Funktionen auf D , so heißt $f(x)$ **stetig partiell differenzierbar** (C^1 -Funktion) auf D .

Bemerkung:

Statt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ schreibt man auch $\partial x_i f$, f_{x_i} oder $D_i f$.

19.3 Beispiel

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 \cos x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 \cos x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -x_1^3 \sin x_2$$

$f(x_1, x_2)$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar.

Die Ableitungsregeln bei Funktionen einer Variablen übertragen sich direkt auf Funktionen mehrerer Variablen.

Satz 19.4 (Differentiationsregeln)

Sind $f(x)$ und $g(x)$ auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, so gilt:

a) **Linearität:** $\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) **Produktregel:** $\frac{\partial}{\partial x_i}(f(x)g(x)) = g(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$

c) **Quotientenregel:** $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)}{(g(x))^2} \quad \text{für } g(x) \neq 0$

Bemerkung:

Die Kettenregel überträgt sich analog.

Definition 19.5

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt ξ (nach allen Koordinaten) partiell differenzierbar. Der Vektor

$$\text{grad } f(\xi) := \nabla f(\xi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix}$$

heißt **Gradient** von f in ξ .

Den symbolischen Vektor $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ nennt man **Nabla-Operator** (nach der Form eines ägyptischen Musikinstruments).

19.6 Bemerkung

a) Satz 19.4 lässt sich umschreiben:

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

b) Der Vektor $\nabla f(\xi)$ zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt ξ . Seine

Länge $|\nabla f| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}$ ist ein Maß für diese Steigung.

19.7 Anwendungsbeispiel

Ein kontinuierliches Grauwertbild kann als Funktion $f(x, y)$ der beiden Ortsvariablen (x, y) aufgefasst werden. Dann ist $|\nabla f|$ ein einfacher Kantendetektor:

Kanten befinden sich an den Orten (x, y) , an denen der Grauwert stark variiert, d.h. an denen $|\nabla f|$ große Werte annimmt. Die Kante verläuft senkrecht zur Richtung des steilsten Anstiegs (d.h. zu ∇f).

Wir verallgemeinern nun den Begriff der Ableitung höherer Ordnung auf Funktionen mehrerer Variablen.

Definition 19.8

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion mehrerer Variablen.

Ist f partiell differenzierbar auf D und sind die partiellen Ableitungen selbst wieder differenzierbar, erhält man als **partielle Ableitungen zweiter Ordnung**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Induktiv definiert man die partiellen Ableitungen k -ter Ordnung durch $(i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\})$.

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right) \text{ für } k \geq 2.$$

$f(x)$ heißt **k -fach partiell differenzierbar**, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung k ,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} \dots D_{i_1} f := \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1} f := f_{x_{i_k} \dots x_{i_1}} \text{ existieren.}$$

Sind diese partiellen Ableitungen stetig, so heißt $f(x)$ **k -fach stetig differenzierbar** (C^k -Funktion).

Stetige Funktionen werden auch als **C^0 -Funktionen** bezeichnet.

Spielt die Reihenfolge, in der man die partiellen Ableitungen berechnet, eine Rolle?
Man kann folgendes Resultat zeigen:

Satz 19.9 (Vertauschbarkeitssatz von Schwarz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Falls f ein C^2 -Funktion ist, sind die partiellen Ableitungen vertauschbar.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Folgerung:

Ist $f(x)$ eine C^k -Funktion, kann man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k beliebig vertauschen.

19.10 Beispiel

Berechne f_{xyz} von $f(x, y, z) = z^2 \sin(x^3) + (\cos y \sin x - e^{-x})z^2$.

Klar: $f(x, y, z)$ ist C^3 -Funktion.

Es ist hier sinnvoll, zuerst nach y zu differenzieren. Damit fallen einige Terme sofort weg.

$$\begin{aligned}
 f_{xyz} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (f_y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (-\sin y \sin x z^2) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (-2z \sin y \sin x) = -2z \sin y \cos x
 \end{aligned}$$

Im Gradienten treten alle partiellen Ableitungen 1.Ordnung auf.

Gibt es einen Ausdruck, in dem alle partiellen Ableitungen 2.Ordnung auftreten?

Definition 19.11

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei im Punkt $\xi \in D$ zweimal partiell differenzierbar.

Dann nennt man die Matrix

$$Hf(\xi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix** von f in ξ .

Bemerkung:

- Für eine C^2 -Funktion ist die Hesse-Matrix nach dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz symmetrisch.
- Wir werden sehen, dass die Hesse-Matrix eine große Rolle bei der Klassifikation der Extrema einer Funktion mehrerer Variablen spielt (z.B. Unterscheidung Maxima-Minima)

Ähnlich wie wir aus ∇f die wichtige rotationsinvariante Größe $|\nabla f|$ abgeleitet haben, können wir auch aus Hf eine rotationsinvariante skalare Größe ableiten. Hierzu betrachten wir die Summe der Diagonalelemente (**Spur**) von Hf .

Definition 19.12

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und f im Punkt $\xi \in D$ zweimal stetig differenzierbar.

Dann nennt man

$$\Delta f(\xi) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\xi)$$

den **Laplace-Operator** von f in ξ .

Bemerkungen:

- Man beachte den Unterschied zwischen dem Nabla-Operator ∇ und dem Laplace-Operator Δ .

- b) In der Bildverarbeitung verwendet man beispielsweise den Laplace-Operator zur Lokalisierung von Kanten. Kanten findet man als Orte, an denen der Laplace-Operator verschwindet.

19.13 Anwendungen: Partielle Differentialgleichungen

Viele Prozesse in der Physik und den Ingenieurwissenschaften lassen sich durch Gleichungen modellieren, die Beziehungen zwischen einer gesuchten Funktion (z.B. Druck, Temperatur, Konzentration, ...) und ihrer partiellen Ableitungen der Ordnung ≤ 2 beschreibt (partielle Differentialgleichungen 2.Ordnung).

Beispiele:

- a) Laplace-Gleichungen (Potentialgleichungen)

$$\Delta u = 0$$

Spielt z.B. eine Rolle bei statischen Problemen, z.B. in der Elastizitätstheorie. Funktionen, die die Laplace-Gleichung erfüllen, heißen harmonische Funktionen.

- b) Wellengleichungen

$$u_{tt} = \Delta u$$

Tritt bei Schwingungsproblemen auf, z.B. in der Schallausbreitung. t beschreibt hierbei

die Zeit, und $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ misst die örtliche Veränderung.

- c) Diffusionsgleichung, Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u$$

Beschreibt die Dynamik von Angleichungsprozessen wie Diffusion und Wärmeleitung. u ist hierbei die Konzentration bzw. Temperatur, und t ist die Zeit.

In der Bildverarbeitung verwendet man Diffusionsprozesse zum Entrauschen (Diffusionsfilter). u beschreibt den Grauwert und die „Diffusionszeit“ t ist ein Maß für die Glättung.

Bisher haben wir nur Ableitungen einer Funktion f von mehreren Variablen $x_1, \dots, x_n$ längs der Koordinatenrichtung $e_1, \dots, e_n$ betrachtet.

Können wir dies auf beliebige Richtungen verallgemeinern?

Definition 19.14

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\xi \in D$.

Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ heißt

$$D_v f(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + hv) - f(\xi)}{h}$$

die Richtungsableitung (Gateaux-Ableitung) von f in Richtung v .

19.15 Bemerkungen

a) Für $v = e_i$ liefert die Richtungsableitung gerade die i -te partielle Ableitung:

$$D_{e_i} f(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$$

Dies folgt sofort aus Definition 19.2 und 19.14.

b) Statt $D_v f$ schreibt man oft auch $\frac{\partial f}{\partial v}$.

c) Die Richtungsableitung $D_v f(\xi)$ beschreibt den Anstieg (die Steigung) von $f(\xi)$ in der Richtung v .

Gibt es ein einfaches Verfahren, wie man Richtungsableitungen berechnet?
Man kann folgendes Resultat zeigen:

Satz 19.16 (Darstellung der Richtungsableitung durch den Gradienten)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei in ξ stetig differenzierbar.

Dann existiert die Richtungsableitung $D_v f$ für jeden Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ und es gilt:

$$D_v f(\xi) = v^T \nabla f(\xi).$$

Beispiel 19.17

$$f(x, y) = e^{-x} \sin y$$

Gesucht ist die Richtungsableitung in Richtung $\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$ zum Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ \pi/6 \end{pmatrix}$.

$$f_x(x, y) = -e^{-x} \sin y \Rightarrow f_x\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f_y(x, y) = e^{-x} \cos y \Rightarrow f_y\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$(D_v f)\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = v^T \nabla f\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \sqrt{3} \end{pmatrix} = -\frac{3}{10} + \frac{4}{10} \sqrt{3}$$

19.18 Bemerkungen

- a) Für $\nabla f \neq 0$ nimmt die Richtungsableitung ihren größten Wert an, falls $v = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Dann gilt:

$$D_v f = v^T \nabla f = \frac{\nabla f^T}{|\nabla f|} \nabla f = \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|} = |\nabla f|$$

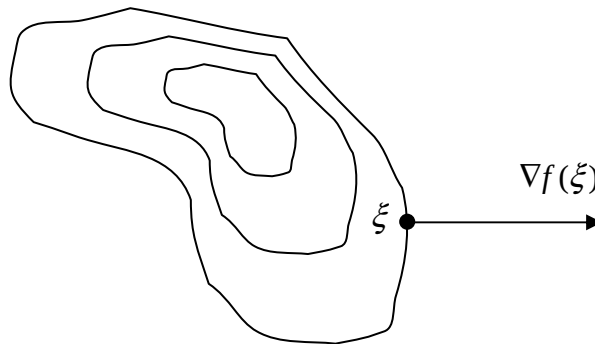
Daher zeigt der Gradient in Richtung des steilsten Anstiegs.

- b) In der Gegenrichtung $v = \frac{-\nabla f}{|\nabla f|}$ ist $D_v f = -|\nabla f|$.

- c) Wählt man für v eine Richtung senkrecht zu ∇f , gilt:

$$D_v f = \frac{(\nabla f^\perp)^T}{|\nabla f^\perp|} \nabla f = 0.$$

Somit ist die Steigung 0, wenn wir uns senkrecht zum Gradienten bewegen.



$\nabla f(\xi)$ steht in ξ senkrecht zur Höhenlinie
 $\{x \in D \mid f(x) = f(\xi)\}$

19.19 Vektorwertige Funktionen mehrerer Variablen

Solche Funktionen treten in der Informatik z.B. bei der Verarbeitung von Farbbildern auf. Kontinuierliche Farbbilder lassen sich als Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ darstellen. $D = [0, a] \times [0, b]$ ist ein rechteckiger Bildbereich und der Wertebereich beschreibt 3 Kanäle rot, grün, blau.

Wir wollen nun den Begriff der partiellen Ableitung einer vektorwertigen Funktion mehrerer Variablen einführen:

Definition 19.20

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\xi \in D$. Die vektorwertige Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

heißt **partiell differenzierbar** in ξ , falls

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + he_i) - f(\xi)}{h}$$

für $i = 1, \dots, n$ existieren.

Bemerkung:

Die partiellen Ableitungen lassen sich also komponentenweise berechnen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\xi) \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, n$$

Diese $m \cdot n$ partiellen Ableitungen lassen sich als Einträge einer $m \times n$ -Matrix deuten. Sie ist die Verallgemeinerung des Gradienten auf den vektorwertigen Fall.

Definition 19.21

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar in ξ .

Dann heißt

$$Jf(\xi) := \begin{pmatrix} \nabla^T f_1(\xi) \\ \vdots \\ \nabla^T f_m(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix}$$

die **Jacobi-Matrix** (Funktionalmatrix) von f in ξ .

19.22 Bemerkungen

- a) Man verwechsle nicht die Hesse-Matrix (skalarwertige Funktionen, 2.Ableitung) mit der Jacobi-Matrix (vektorwertige Funktionen, 1.Ableitung).
- b) I.A. ist die Jacobi-Matrix weder quadratisch noch symmetrisch.
- c) Gelegentlich schreibt man statt Jf auch Df oder f' .

19.23 Beispiel

Die Jacobi-Matrix der Funktion $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 y \\ \cos y \\ e^{x \cdot y} \end{pmatrix}$ lautet:

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 0 & -\sin y \\ y \cdot e^{x \cdot y} & x \cdot e^{x \cdot y} \end{pmatrix}$$

Definition 19.24

Im Fall $m = n$ heißt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld** auf D . Ist jede Koordinatenfunktion $f_i(x)$ eine C^k -Funktion, heißt $f(x)$ ein **C^k -Vektorfeld**.

Bemerkung:

Beispiele für Vektorfelder sind Geschwindigkeitsfelder in strömenden Gasen oder Temperaturgradienten innerhalb von Körpern,...

Definition 19.25

Für ein differenzierbares Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert man die **Divergenz** durch

$$\operatorname{div} f(\xi) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\xi).$$

Bemerkung:

Formal kann man die Divergenz als Skalarprodukt aus Nabla-Operator und Vektorfeld auffassen. Man schreibt daher manchmal statt $\operatorname{div} f$ auch $\nabla \cdot f$ oder $\langle \nabla, f \rangle$.

Man zeigt leicht:

Satz 19.26 (Rechenregeln für die Divergenz)

Für partiell differenzierbare Vektorfelder $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine skalarwertige Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

- a) **Linearität:** $\operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div} f + \beta \operatorname{div} g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- b) **Produktregel:** $\operatorname{div}(\varphi \cdot f) = (\nabla \varphi)^T f + \varphi \operatorname{div} f$

19.27 Bemerkungen

- a) Obwohl der Nabla-Operator und die Divergenz ähnlich aussehen, unterscheiden sich ihre Wirkungen sehr stark:
- Der Nabla-Operator erzeugt aus einer skalaren Funktion eine vektorwertige Funktion.
 - Die Divergenz macht aus einem Vektorfeld eine skalarwertige Funktion.
- b) Mit Hilfe der Divergenz kann man den Laplace-Operator umschreiben:
 $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$.
 Somit kann man z.B. die Diffusionsgleichung $u_t = \Delta u$ als $u_t = \operatorname{div}(\nabla u)$ schreiben.

Neben der Divergenz gibt es noch einen weiteren wichtigen Differentialausdruck für Vektorfelder:

Definition 19.28

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert man die **Rotation** in einem Punkt $\xi \in D$ durch

$$\operatorname{rot} f(\xi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\xi) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\xi) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\xi) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\xi) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\xi) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\xi) \end{pmatrix}.$$

19.29 Bemerkungen

- a) Die Rotation ist nur für Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$ definiert.
- b) Sie kann formal als das Kreuzprodukt aus ∇ -Operator und dem Vektorfeld aufgefasst werden ($\operatorname{rot} f = \nabla \times f$).

Mit den kanonischen Einheitsvektoren $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T$, $e_3 = (0,0,1)^T$ kann man formal schreiben:

$$\operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Dann: formale Entwicklung der „Determinante“ nach der 1. Zeile.

19.30 Beispiel

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y - z \\ z^2 + x^2 \\ y + 2x^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(\xi) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(\xi) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(\xi) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(\xi) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\xi) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2z \\ -1 - 4x \\ 2x - 3x^2 \end{pmatrix}$$

Man kann ähnliche Rechenregeln wie beim Divergenzoperator zeigen:

Satz 19.31 (Rechenregeln für die Rotation)

Für partiell differenzierbare Vektorfelder $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ und eine skalarwertige Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

a) **Linearität:** $\operatorname{rot}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{rot} f + \beta \operatorname{rot} g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) **Produktregel:** $\operatorname{rot}(\varphi \cdot f) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} + \varphi \cdot \operatorname{rot} f$
(formal!)