

§17 Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Problem:

Die Berechnung der Eigenwerte einer Matrix $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ über die Nullstellen von $\det(A - \lambda I)$ führt für $n \geq 5$ auf Polynomgrade, für die keine analytischen Lösungsformeln existieren. Daher sind numerische Verfahren notwendig.

17.1 Die einfache Vektoriteration (Potenzmethode, Von-Mises-Verfahren)

Simple Verfahren zur Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes und seines Eigenvektors

Grundidee:

Sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrische Matrix und $u_0 \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Startvektor.

Lassen sich mit der Iteration

$$u_{k+1} = A \cdot u_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Aussagen über die Eigenwerte und Eigenvektoren von A gewinnen?

Lösung:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Eigenwerte und $v_1, \dots, v_n$ zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren von A .

O.B.d.A. sei $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$.

$$\text{Sei } u_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k.$$

$$\Rightarrow u_1 = A \cdot u_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k A v_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i$$

$$\text{analog } u_k = A^k \cdot u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i = \lambda_1^k \cdot \left(\alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} v_i \right).$$

Falls $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ (d.h. λ_1 ist **dominanter Eigenwert**), so konvergiert $\sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} v_i$ gegen 0

für $k \rightarrow \infty$.

Falls der Startvektor u_0 genügend allgemein gewählt wurde (so dass $\alpha_1 \neq 0$), konvergiert u_k gegen den dominanten Eigenvektor $\lambda_1^k \alpha_1 v_1$. Die Konvergenz ist umso schneller, je

kleiner $\frac{|\lambda_i|}{|\lambda_1|}$ sind ($i = 2, \dots, n$).

Der Rayleigh-Koeffizient $R_A(u_k) = \frac{u_k^T A u_k}{u_k^T u_k}$ konvergiert gegen $\frac{\lambda_1^{k+1} \alpha v_1^T \lambda_1^k \alpha v_1}{\lambda_1^k \alpha v_1^T \lambda_1^k \alpha v_1} = \lambda_1$.

Die Vektoriteration ist somit ein einfaches Verfahren zur Approximation des dominanten Eigenwerts (und somit der Spektralnorm) und des dominanten Eigenvektors einer symmetrischen Matrix.

In der Praxis normiert man u_k nach jedem Iterationsschritt um zu vermeiden, dass u_k numerisch „explodiert“ (für $|\lambda_1| > 1$) bzw. gegen 0 strebt (für $|\lambda_1| < 1$).

17.2 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,72 \\ 0,72 & 1,46 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_0 \text{ (bereits normiert)}$$

$$u_1 = A \cdot u_0 = \begin{pmatrix} 1,04 \\ 0,72 \end{pmatrix} \quad v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} \approx \begin{pmatrix} 0,8222 \\ 0,5682 \end{pmatrix} \quad R_A(v_0) = \frac{v_0^T A v_0}{v_0^T v_0} = v_0^T \cdot v_1 = 1,04$$

$$u_2 = A \cdot v_1 \approx \begin{pmatrix} 1,2649 \\ 1,4230 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{u_2}{|u_2|} \approx \begin{pmatrix} 0,6645 \\ 0,7476 \end{pmatrix} \quad R_A(v_1) = v_1^T u_2 \approx 1,8500$$

$$u_3 = A \cdot v_2 \approx \begin{pmatrix} 1,2294 \\ 1,5699 \end{pmatrix} \quad v_3 \approx \begin{pmatrix} 0,6166 \\ 0,7873 \end{pmatrix} \quad R_A(v_2) = v_2^T u_3 \approx 1,9906$$

$$u_4 = A \cdot v_3 \approx \begin{pmatrix} 1,2081 \\ 1,3934 \end{pmatrix} \quad v_4 \approx \begin{pmatrix} 0,6042 \\ 0,7968 \end{pmatrix} \quad R_A(v_3) = v_3^T u_4 \approx 1,9994$$

$$u_5 = A \cdot v_4 \approx \begin{pmatrix} 1,2020 \\ 1,5984 \end{pmatrix} \quad v_5 \approx \begin{pmatrix} 0,6010 \\ 0,7992 \end{pmatrix} \quad R_A(v_4) = v_4^T u_5 \approx 1,9999$$

exakte Lösung für dominanten Eigenvektor bzw. Eigenwert: $v = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}, \quad \underline{\lambda = 2}$

17.3 Das Jacobi-Verfahren

Ein einfaches und robustes Verfahren zur Bestimmung aller Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix

Grundidee:

- a) Wendet man auf eine symmetrische Matrix A eine orthogonale Transformation Q an, so haben $Q^T A Q$ und A dieselben Eigenwerte.
- b) Mit Hilfe einer Sequenz $(Q_k)_{k=1,2,\dots}$ von orthogonalen Matrizen transformiert man A auf Diagonalgestalt. Die Diagonalelemente geben die Eigenwerte an, und aus (Q_k) berechnet man die Eigenvektoren.

Beweis:

zu a): A und $Q^T A Q$ haben dasselbe charakteristische Polynom, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
 p_{Q^T A Q}(\lambda) &= \det(Q^T A Q - \lambda I) = \det(Q^T \cdot (A - \lambda I) \cdot Q) \\
 &= \det(Q^T \cdot (A - \lambda I) \cdot Q) = \det(Q^T) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(Q) \\
 &= \det(Q^T) \cdot \det(Q) \cdot \det(A - \lambda I) \\
 &= \det(Q^T Q) \cdot \det(A - \lambda I) \\
 &= 1 \cdot \det(A - \lambda I) \\
 &= p_A(\lambda)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow Q^T A Q$ und A haben dieselben Eigenwerte

q.e.d.

Einige Details zu b):

Als orthogonale Transformation verwendet man Rotationsmatrizen vom Typ

$$Q_k := Q(i, j, \varphi_k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos \varphi_k & \cdots & \cdots & \sin \varphi_k \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \vdots & & & 1 \\ & & & -\sin \varphi_k & \cdots & \cdots & \cos \varphi_k \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow i\text{-te Zeile}$
 $\leftarrow j\text{-te Zeile}$

Man kann sich überlegen, dass $Q_k^T A Q_k$ nur die i -ten und j -ten Zeilen bzw. Spalten von A verändert.

$$Q_k^T A Q_k : \begin{pmatrix} & i & & j & \\ & \square & & \square & \\ & \square & \square & \square & \\ & \square & \square & \square & \\ & \square & \square & \square & \\ & \square & \square & \square & \\ & \square & \square & \square & \\ & \square & \square & \square & \\ & \square & \square & \square & \\ & \square & \square & \square & \end{pmatrix}$$

i
 j

$$a_{ij} = 0 \rightarrow a_{ji} = 0$$

Den Rotationswinkel φ_k wählt man so, dass man a_{ij} und a_{ji} zum Verschwinden bringt.

Führt man dies iterativ für alle Nichtdiagonalelemente von A durch, kann man zeigen, dass das Verfahren gegen eine Diagonalmatrix konvergiert.

$$Q_k^T \cdot \dots \cdot Q_2^T Q_1^T A Q_1 Q_2 \cdot \dots \cdot Q_k \rightarrow \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Die m -te Spalte von $P := Q_1 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_k$ enthält somit eine Approximation an der Eigenvektor v_m zum Eigenwert λ_m .

Da P orthogonal ist, erhält man insbesondere auch im Fall von mehrfachen Eigenwerten ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren (ohne Gram-Schmidt!).

Ein genauer Algorithmus zum Jacobi-Verfahren findet sich in:

H.R. Schwarz „Numerische Mathematik“ (Tenberger Stuttgart)

Komplexität pro Zyklus (d.h. jedes Nichtdiagonalelement wird einmal auf 0 transformiert) bei $n \times n$ -Matrix = $32n^3$ Multiplikationen.

Typischerweise werden 6-8 Zyklen benötigt.

Fazit:

Eigenwertprobleme sind numerisch aufwendig.

Es existieren wesentlich komplexere numerische Verfahren insbesondere für nicht-symmetrische Matrizen.