

§16 Matrixnormen und Eigenwertabschätzungen

Problem:

Kann man die Eigenwerte einer Matrix mit geringerem Aufwand abschätzen?
Ein wichtiges Hilfsmittel hierzu sind Matrixnormen.

Definition 16.1

Unter einer **Matrixnorm** versteht man eine Funktion $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- a) $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$
 $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- b) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$
- c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$
- d) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ (Submultiplikativität)

16.2 Beispiele

Sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- a) **Gesamtnorm:** $\|A\|_G := n \cdot \max_{i,k} |a_{ik}|$
- b) **Zeilensummennorm:** $\|A\|_Z := \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$
- c) **Spaltensummennorm:** $\|A\|_S := \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$
- d) **Frobeniusnorm:** $\|A\|_F := \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2 \right)^{1/2}$
- e) **Spektralnrm:** $\|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$

wobei $\lambda_{\max}(A^T A)$ der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.

Falls A symmetrisch: $\|A\|_2 = \max_k \{|\lambda_k| \mid \lambda_k \text{ Eigenwert von } A\}$

Da Matrizen und Vektoren oft gemeinsam auftreten, sollen Matrix- und Vektornorm verträglich sein.

Definition 16.3

Eine Matrixnorm A heißt **kompatibel** (**verträglich**) mit einer Vektornorm, falls:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

16.4 Beispiele

Zu den p -Normen (vgl. Übungsblatt 4, Aufgabe 2)

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \max_i |x_i| & (p = \infty) \end{cases}$$

bestehen folgende Verträglichkeiten:

- a) $\|A\|_G, \|A\|_S$ sind kompatibel zur Betragssummennorm $\|x\|_1$
- b) $\|A\|_G, \|A\|_F, \|A\|_2$ sind kompatibel zur euklidischen Norm $\|x\|_2 = |x|$
- c) $\|A\|_G, \|A\|_Z$ sind kompatibel zur Maximumsnorm $\|x\|_\infty$.

Beweis der Kompatibilität von $\|A\|_G$ und $\|x\|_\infty$:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_i \left\{ \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right\} \leq \max_i \left\{ \sum_{k=1}^n |a_{ik} x_k| \right\} && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &\leq \max_i \left\{ \sum_{k=1}^n \max_{r,s} |a_{rs}| \max_l |x_l| \right\} \\ &= n \cdot \max_{r,s} |a_{rs}| \max_l |x_l| = \|A\|_G \cdot \|x\|_\infty && \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Da zu einer Vektornorm $\|x\|$ oft mehrere kompatible Matrixnormen existieren, verwendet man gerne diejenigen Matrixnormen, bei der die Abschätzung $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ am schärfsten ist.

Definition 16.5

Die zu einer gegebenen Vektornorm $\|x\|$ definierte Zahl

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

heißt **zugeordnete Matrixnorm**.

Man kann zeigen, dass die zugeordnete Matrixnorm alle Eigenschaften von Definition 16.1 erfüllt und die kleinste aller Matrixnormen ist, die mit der Vektornorm kompatibel sind.

16.6 Beispiele

Vektornorm	zugeordnete Matrixnorm
Betragssummennorm $\ x\ _1$	Spaltensummennorm $\ A\ _s$
euklidische Norm $\ x\ _2$	Spektralnrm $\ A\ _2$
Maximumsnorm $\ x\ _\infty$	Zeilensummennorm $\ A\ _z$

Beweis für $\|x\|_\infty$:

Die $\|x\|_\infty$ zugeordnete Matrixnorm lautet:

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \left\{ \max_i \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \right\} \\ &= \max_i \left\{ \max_{\|x\|_\infty=1} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \right\} = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| = \|A\|_z \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Matrixnormen sind nützlich zur Abschätzung von Eigenwerten.

Satz 16.7 (Eigenwertabschätzung mit Matrixnormen)

Ist λ Eigenwert von $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ und $\|A\|$ eine beliebige, zu einer Vektornorm kompatiblen Matrixnorm, so gilt:

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

Beweis:

Sei v Eigenvektor von A :

$$\Rightarrow |\lambda| \|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \leq \|A\| \|v\| \quad | : \|v\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \|A\| \quad \text{q.e.d.}$$

16.8 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 & -0,1 \\ 0 & 2 & 0,4 \\ -0,2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_G = 3 \max_{i,j} |a_{ij}| = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\|A\|_z = \max\{1,2; 2,4; 3,2\} = 3,2$$

$$\|A\|_s = \max\{1,2; 2,1; 3,5\} = 3,5$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1 + 0,01 + 0,01 + 4 + 0,16 + 0,04 + 9} = \sqrt{14,22} \approx 3,77$$

$\|A\|_Z$ liefert die schärfste Abschätzung: $|\lambda| \leq 3,2$

Tatsächlich gilt:

$$\lambda_1 \approx 3,0060, \quad \lambda_2 \approx 2,0078, \quad \lambda_3 \approx 0,9862$$

Gibt es auch Abschätzungen für **alle** Eigenwerte?

Satz 16.9 (Satz von Gerschgorin)

a) Die Vereinigung aller Kreisscheiben

$$K_i := \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}| \right\}$$

enthält alle Eigenwerte von $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$

b) Jede Zusammenhangskomponente aus m solcher Kreise enthält genau m Eigenwerte (der Vielfachheit nach gezählt).

Beweis:

siehe Stoer / Burlisch: Einführung in die numerische Mathematik II

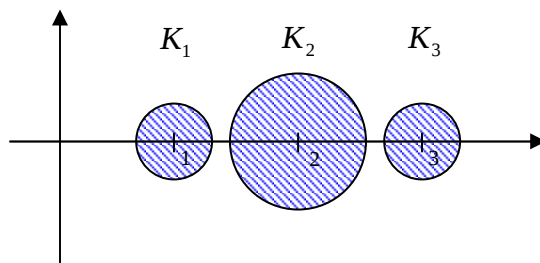
16.10 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 & -0,1 \\ 0 & 2 & 0,4 \\ -0,2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{ \mu \mid |\mu - 1| \leq 0,2 \}$$

$$K_2 = \{ \mu \mid |\mu - 2| \leq 0,4 \}$$

$$K_3 = \{ \mu \mid |\mu - 3| \leq 0,2 \}$$



Da K_1, K_2, K_3 nicht überlappen, liegt nach (b) genau ein Eigenwert in jedem der Kreise.

Ferner ist A invertierbar, da 0 außerhalb von $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ liegt, also kein Eigenwert sein kann.