

§15 Quadriken

Ziel:

Transformiere eine vorgegebene Quadrik (vgl. Definition 14.1) durch eine geeignete Transformation auf eine einfache Form, an der man die geometrische Gestalt ablesen kann.

15.1 Allgemeine Vorgehensweise

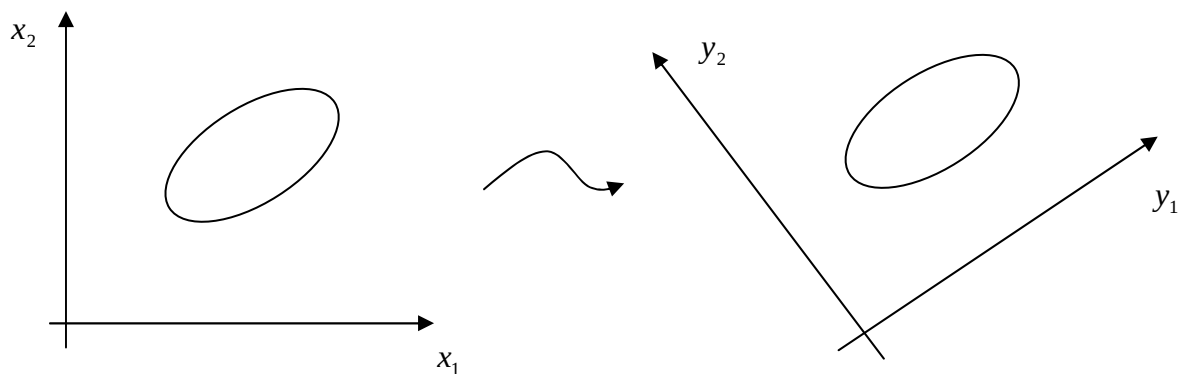
Gegeben:

Quadrik $q(x) = x^T A x + b^T x + c$

mit $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, $x, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Schritt 1: Elimination der gemischten quadratischen Terme

durch Drehung des Koordinatensystems, so dass A diagonal wird.



Berechne Eigenwerte λ_i von A sowie Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von Eigenvektoren mit $\det(v_1 | \dots | v_n) = 1$. (Falls $\det(v_1 | \dots | v_n) = -1$, dann betrachte $-v_1, v_2, \dots, v_n$)

Mit $Q = (v_1 | \dots | v_n)$ gilt dann:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^T A Q$$

und aus $x^T A x + b^T x + c = 0$ folgt:

$$x^T Q \Lambda Q^T x + b^T Q Q^T x + c = 0$$

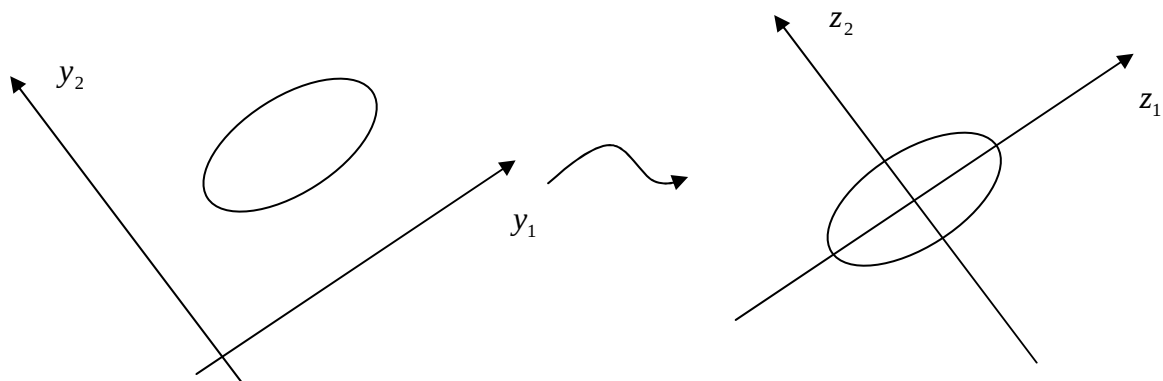
Mit $y := Q^T x$ und $\tilde{b} := Q^T b$:

$$y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c = 0$$

explizit: $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 + \tilde{b}_1 y_1 + \dots + \tilde{b}_n y_n + c = 0$

Schritt 2: Elimination linearer Terme (falls möglich)

durch Translation des Koordinatensystems



bewirkt, dass nicht gleichzeitig $\lambda_k y_k^2$ und $\tilde{b}_k y_k$ vorkommen.

Sei o.B.d.A. $\lambda_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$ und $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

Dann eliminiert man für $i = 1, \dots, r$ den linearen Term $\tilde{b}_i y_i$ durch quadratische Ergänzung.

$$z_i := \begin{cases} y_i + \frac{\tilde{b}_i}{2\lambda_i} & (i = 1, \dots, r) \\ y_i & (i = r+1, \dots, n) \end{cases}$$

Damit erhält man: $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + \tilde{b}_{r+1} z_{r+1} + \dots + \tilde{b}_n z_n + \tilde{c} = 0$

mit $\tilde{c} = c - \sum_{k=1}^r \frac{\tilde{b}_k^2}{4\lambda_k}$ und $r = \text{rang } A$.

Schritt 3: Elimination der Konstanten (falls möglich)

Ist eines der $\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_n$ ungleich 0 (o.B.d.A. $\tilde{b}_n$), eliminiert man $\tilde{c}$ durch

$$z_n \rightarrow z_n - \frac{\tilde{c}}{\tilde{b}_n}$$

Resultat: Normalform der Quadrik

Darstellung in einem Koordinatensystem, in dem möglichst viele Koeffizienten verschwinden

Für $r = \text{rang } A = n$: $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + d = 0$

Für $r < n$: entweder: $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + e_{r+1} z_{r+1} + \dots + e_n z_n = 0$

oder: $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2 + d = 0$

15.2 Beispiel

Bringe die Quadrik

$$q(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{80}{\sqrt{5}}x_2 + 4 = 0$$

auf Normalform.

Lösung:

$$q(x) = x^T Ax + b^T x + c \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, b = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 20 \\ -80 \end{pmatrix}, c = 4$$

Hauptachsentransformation von A liefert $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ mit } \det Q = 1$$

Mit $\Lambda = Q^T A Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ und $\tilde{b} = Q^T b = \begin{pmatrix} -8 \\ -36 \end{pmatrix}$ ergibt sich für $y = Q^T x$:

$$4y_1^2 + 9y_2^2 - 8y_1 - 36y_2 + 4 = 0$$

Elimination linearer Terme durch quadratische Ergänzung:

$$4(y_1^2 - 2y_1 + 1) + 9(y_2^2 - 4y_2 + 4) = -4 + 4 + 36$$

Mit $z_1 := y_1 - 1$ und $z_2 := y_2 - 2$ ergibt sich

$$4z_1^2 + 9z_2^2 = 36 \quad | : 36$$

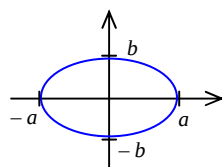
$$\frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{4} = 1$$

Ellipse mit Halbachsen 3 und 2

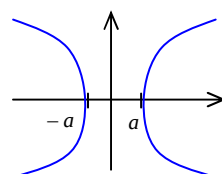
15.3 Normalform der Quadriken im $\mathbb{R}^2$ (Kegelschnitte)

i) $\text{rang } A = 2$ (alle Eigenwerte $\neq 0$)

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ Ellipse



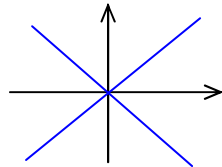
b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ Hyperbel



c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ leere Menge

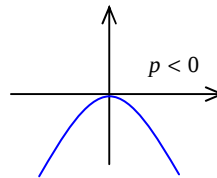
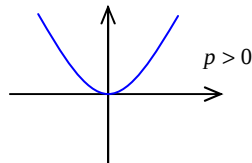
d) $x^2 + a^2 y^2 = 0$ Punkt $(0,0)$

e) $x^2 - a^2 y^2 = 0$ Geradenpaar $y = \pm \frac{x}{a}$



ii) $\text{rang } A = 1$ (ein Eigenwert $= 0$)

a) $x^2 - py = 0$ Parabel



b) $x^2 - a^2 = 0$ parallele Gerade $x = \pm a$

c) $x^2 + a^2 = 0$ leere Menge

d) $x^2 = 0$ „Doppelgerade“ $x = 0$

iii) $\text{rang } A = 0$ (alle Eigenwerte $= 0$)

$b_1 x + b_2 y + y = 0$ allgemeine Geradengleichung

15.4 Normalform der Quadriken im $\mathbb{R}^3$

i) $\text{rang } A = 3$ (alle Eigenwerte $\neq 0$)

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Ellipsoid

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ leere Menge

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ einschaliges Hyperboloid

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ zweischaliges Hyperboloid

e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ Punkt (0,0,0)

f) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ elliptischer Kegel

ii) rang $A = 2$ (ein Eigenwert = 0)

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$ elliptisches Paraboloid

b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$ hyperbolisches Paraboloid

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ leere Menge

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ elliptischer Zylinder

e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ hyperbolischer Zylinder

f) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ Gerade

g) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ Ebenenpaar mit Schnittgerade

iii) rang $A = 1$

a) $x^2 - 2pz = 0$ parabolischer Zylinder

b) $x^2 - a^2 = 0$ paralleles Ebenenpaar

c) $x^2 + a^2 = 0$ leere Menge

d) $x^2 = 0$ Ebene

iv) $\text{rang } A = 0$

$b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$ allgemeine Ebenengleichung