

§14 Quadratische Formen und positiv definite Matrizen

Definition 14.1

Sei $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch.

Dann heißt

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

quadratische Form. Sei ferner $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$q(x) := x^T A x + b^T x + c$$

quadratisches Polynom in $x_1, \dots, x_n$.

Die Menge aller Punkte x mit

$$q(x) = x^T A x + b^T x + c = 0 \text{ heißt } \underline{\text{Quadrik}}.$$

14.2 Beispiele

$$\begin{aligned} \text{a) } & 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 \\ &= 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_2 \\ &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{quadratische Form} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 7x_2 + 3 \\ & \text{ist ein quadratisches Polynom} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (\text{Ellipsengleichung}) \\ & \text{ist eine Quadrik mit } n = 2. \end{aligned}$$

Quadriken mit $n = 2$ können generell als Kegelschnitte (Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln,...) aufgefasst werden. Für $n = 3$ entstehen Ellipsoide, Paraboloiden usw.

Definition 14.3

Sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A . Dann heißt A

- **positiv definit**, falls $\lambda_i > 0 \quad \forall i$,
- **positiv semidefinit**, falls $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$,
- **negativ definit**, falls $\lambda_i < 0 \quad \forall i$,
- **negativ semidefinit**, falls $\lambda_i \leq 0 \quad \forall i$,
- **indefinit**, falls λ_i, λ_j existieren mit $\lambda_i, \lambda_j < 0$.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen positiver (Semi-) Definitheit und quadratischen Formen:

Satz 14.4 (Charakterisierung positiv definiter Matrizen)

Sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:

- a) A ist positiv definit
- b) $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \neq 0$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei $\{w_1, \dots, w_n\}$ Orthonormalbasis von Eigenvektoren von A mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Dann gilt für $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ mit $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 x^T A x &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \right)^T \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j w_j w_j^T \right) \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k w_k \right) \\
 &= \sum_{i,j,k} \alpha_i \lambda_j \alpha_k \underbrace{(w_i^T w_j)}_{0 \text{ für } i \neq j} \underbrace{(w_j^T w_k)}_{0 \text{ für } j \neq k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \underbrace{\lambda_k}_{>0} > 0
 \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (a)

Sei A nicht positiv definit. Dann existiert ein Eigenwert $\lambda \leq 0$ mit Eigenvektor $v (\neq 0)$, so dass $v^T A v = v^T (\lambda v) = \underbrace{\lambda}_{\leq 0} \underbrace{v^T v}_{\geq 0} \leq 0$.

Widerspruch zu $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$.

q.e.d.

Als wichtiges Kriterium zum Überprüfen von positiver Definitheit **ohne** Eigenwertberechnung kann man zeigen:

Satz 14.5 (Hauptminorenkriterium)

Eine symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit (bzw. semidefinit), wenn ihre **Hauptminoren**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

für $k = 1, \dots, n$ positiv (bzw. nichtnegativ) sind.

14.6 Beispiel

Ist $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ positiv definit?

Hauptminoren:

- $|2| = 2 > 0$

(Determinante, kein Betrag)

- $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

- $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$
 $= 2(18 - 16) + (-9 + 12) - 3(-4 + 6)$
 $= 4 + 3 - 6 = 1 > 0$

$\Rightarrow A$ positiv definit

Ähnlich wie zu jeder nichtnegativen Zahl eine Wurzel existiert, gibt es auch die „Wurzel“ aus einer positiv semidefiniten Matrix.

Satz 14.7 (Wurzel aus einer positiv semidefiniten Matrix)

Die symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ sei positiv semidefinit. Dann existiert eine symmetrische positiv semidefinite Matrix $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ mit $B^2 = A$.

Beweis:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A und $v_1, \dots, v_n$ die entsprechenden Eigenvektoren.

Mit $Q := (v_1 \mid \dots \mid v_n)$ und $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gilt dann: $A = Q\Lambda Q^T$

Setze $\Lambda^{1/2} := \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ und $B := Q\Lambda^{1/2}Q^T$.

$$\Rightarrow B^2 = Q\Lambda^{1/2} \underbrace{Q^T Q}_{I} \Lambda^{1/2} Q^T = Q\Lambda Q^T = A \quad \text{q.e.d.}$$

Positive und negative definite Matrizen spielen eine wichtige Rolle beim Nachweis von Minima und Maxima bei Funktionen mehrerer Variabler ($\rightarrow$ später)

Gibt es obere und untere Schranken für quadratische Formen?

Definition 14.8

Sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$. Dann nennt man

$$R_A(x) := R(x) := \frac{x^T A x}{x^T x}$$

den **Rayleigh-Quotienten**.

Satz 14.9 (Rayleigh-Prinzip)

Sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ und entsprechenden orthonormierten Eigenvektoren $w_1, \dots, w_n$. Dann gilt:

- a) $\lambda_n \leq R(x) \leq \lambda_1$
- b) Diese Grenzen werden auch tatsächlich angenommen:
 $\lambda_1 = \max_{x \neq 0} R(x) \quad \lambda_n = \min_{x \neq 0} R(x)$

Beweis:

a) Aus $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ folgt: $x^T x = \left(\sum_i \alpha_i w_i \right)^T \left(\sum_j \alpha_j w_j \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$

und $Ax = \sum_{i=1}^n \alpha_i A w_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i w_i)$

$$\Rightarrow x^T A x = \left(\sum_i \alpha_i w_i^T \right) \left(\sum_j \alpha_j \lambda_j w_j \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{\sum_i \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_i \alpha_i^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \leq \lambda_1 \\ \geq \lambda_n \end{array} \right.$$

b) Setzt man $x = w_k$, so folgt

$$R(w_k) = \frac{w_k^T A w_k}{w_k^T w_k} = \frac{w_k^T \lambda_k w_k}{w_k^T w_k} = \lambda_k$$

Also: $\lambda_n = R(w_n) \leq R(x) \leq R(w_1) = \lambda_1 \quad \text{q.e.d.}$