

§13 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen

Problem:

Symmetrische Matrizen (d.h. $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$) kommen in der Praxis häufig vor. Gibt es in diesem Fall einfache Aussagen über Eigenwerte und Eigenvektoren?

Satz 13.1 (Eigenwerte, -vektoren symmetrischer Matrizen)

Für eine symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ gilt:

- a) Alle Eigenwerte sind reell.
- b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis:

- a) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $\bar{z} = x - iy$ die konjugiert komplexe Zahl. Dann ist

$$\bar{z}z = z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.$$

Für Vektoren und Matrizen definiert man die komplexe Konjugation komponentenweise.

Sei nun λ Eigenwert von A zum Eigenvektor v .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{\lambda} \bar{v}^T v &= (\overline{\lambda v})^T v = (\overline{Av})^T v = \bar{v}^T \bar{A}^T v \\ &= \bar{v}^T Av = \bar{v}^T (\lambda v) = \lambda \bar{v}^T v \end{aligned}$$

Da $\bar{v}^T v \in \mathbb{R}$ und $\neq 0$ (Eigenvektoren sind $\neq 0$), ist $\bar{\lambda} = \lambda$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$

- b) Seien v_1, v_2 Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2 .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 v_1^T v_2 &= (\lambda_1 v_1)^T v_2 = (Av_1)^T v_2 = v_1^T A^T v_2 = v_1^T (Av_2) \\ &= v_1^T (\lambda_2 v_2) = \lambda_2 v_1^T v_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_1^T v_2 \quad \Rightarrow v_1 \text{ und } v_2 \text{ sind orthogonal.} \quad \text{q.e.d.}$$

13.2 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{symmetrisch}$$

- Eigenwerte:

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 \\ &= 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ zwei reelle Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$

- **Eigenvektoren** zu $\lambda_1 = 0$ $(A - \lambda_1 I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{zwei linear abhängige Gleichungen}$$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_2 := s \quad \Rightarrow x_1 = -2s \quad \Rightarrow \text{Eigenraum } \left\{ \begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Eigenvektor z.B. } v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Eigenvektoren** zu $\lambda_2 = 5$ $(A - \lambda_2 I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{zwei linear abhängige Gleichungen}$$

$$2x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 := s \quad \Rightarrow x_2 = 2s \quad \Rightarrow \text{Eigenraum } \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 2s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Eigenvektor z.B. } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

v_1 und v_2 sind orthogonal.

Symmetrische Matrizen lassen sich mit Hilfe ihrer Eigenwerte und Eigenvektoren elegant zerlegen:

Satz 13.3. (Hauptachsentransformation, Spektralsatz)

Sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch. Nach Satz 13.1 hat A ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ mit zugehörigen reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann ist

$$A = Q \Lambda Q^T$$

mit der orthogonalen Matrix $Q = (v_1 \mid \dots \mid v_n)$ und der Diagonalmatrix

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bemerkung:

a) Das bedeutet, dass A auf Diagonalgestalt transformiert werden kann.

$$\Lambda = Q^T A Q$$

Durch den Übergang in das durch $Q = (v_1 | \dots | v_n)$ definierte Koordinatensystem hat A also eine besonders einfache Gestalt.

b) A lässt sich auch schreiben als

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^T + \dots + \lambda_n v_n v_n^T$$

Hier erkennt man sofort, dass $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Eigenwerte zu $v_1, \dots, v_n$ sind, denn

$$A v_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \underbrace{v_i^T v_k}_{=0 \text{ für } i \neq k} = \lambda_k v_k$$

Beweis (zu Satz 13.3):

Nach Satz 13.1 sind die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal.

Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren erzeugt man nun ein Orthonormalsystem in jedem Eigenraum. Damit entsteht ein Orthonormalsystem $\{v_1, \dots, v_n\}$ von Eigenvektoren von A .

Die k -te Spalte von $Q^T A Q$ lautet:

$$Q^T A v_k = Q^T (\lambda_k v_k) = \lambda_k Q^T v_k = \lambda_k e_k$$

$$\text{mit } e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-te Stelle}$$

$$\text{Somit ist } Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{q.e.d.}$$

13.4 Beispiel

Transformiere $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ auf Diagonalgestalt.

Lösung:

Nach Beispiel 13.2 hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 5$ mit Eigenvektoren $w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

und $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Normierung der Eigenvektoren ergibt $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Mit der orthogonalen Matrix

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ folgt } Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$