

Intermezzo: Rechnen mit Determinanten

Wichtige Rechenregeln:

a) (2×2) -Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

b) Entwicklungssatz von Laplace erlaubt Auswertung von Determinanten durch Entwicklung nach einer beliebigen Zeile / Spalte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

mit schachbrettartiger Vorzeichenverteilung:

+	-	+	-	...
-	+	-	+	...
+	-	+	-	...
⋮				

c) $\det(A) = \det A^T$

d) Addiert man zu einer Zeile / Spalte ein Vielfaches einer anderen Zeile / Spalte, bleibt die Determinante gleich.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} \quad (1.\text{Zeile von 2. und 3. abgezogen})$$

e) Sind zwei Zeilen- oder Spaltenvektoren linear abhängig, ist die Determinante 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad (2. \text{ und } 3. \text{ Zeile linear abhängig})$$

f) Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7) \cdot 2 = -42$$

g) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ für $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$

aber $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$!!! für $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$