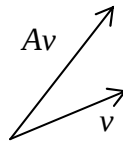


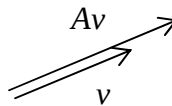
§12 Eigenwerte und Eigenvektoren

Problem:

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Dann sind v und Av normalerweise nicht parallel.



Gibt es ausgezeichnete Richtungen v , so dass Av ein skalares Vielfaches von v ist?



Definition 12.1

Sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Ein von 0 verschiedener Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Eigenvektor** von A , wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$Av = \lambda v.$$

Der Skalar λ heißt dann **Eigenwert** von A .

Bemerkung:

Eigenvektoren und Eigenwerte sind wichtig in Statik, Maschinenbau, Elektrotechnik, Informatik, Biologie und Wirtschaftswissenschaften. Oft bezeichnen sie besondere Zustände von Systemen.

Beispiel:

1831 haben Soldaten eine Brücke zum Einsturz gebracht, weil sie mit einer Frequenz marschiert sind, die einen Eigenwert der Brücke getroffen hat. Seitdem marschiert man nicht mehr im Gleichschritt über Brücken.

12.2 Beispiel

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, denn

$$Av = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3v$$

12.3 Bestimmung von Eigenwerten

Aus $Av = \lambda v$ folgt $(A - \lambda I)v = 0$.

$v = 0$ ist als Eigenvektor ausgenommen, da stets $A \cdot 0 = 0$ ist.

Wir suchen also **nichttriviale** Lösungen von $(A - \lambda I)v = 0$. Dazu muss gelten:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Für eine $(n \times n)$ -Matrix A ist $\det(A - \lambda I)$ Polynom vom Grad n in λ (**charakteristisches Polynom** von A).

Seine (höchstens n verschiedenen) Nullstellen sind die Eigenwerte.

12.4 Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir die charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 6 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) - 6 \\ &= 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \qquad \lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = -1$$

12.5 Bemerkung

- Selbst wenn A nur reelle Einträge hat, können komplexe Eigenwerte auftreten.
- Sucht man Eigenwerte einer $(n \times n)$ -Matrix als Nullstellen des charakteristischen Polynoms, kann das für $n \geq 3$ unangenehm, für $n \geq 5$ i.A. analytisch unmöglich werden. Dann werden numerische Approximationen benötigt (ebenfalls relativ schwierig).
- Man kann zeigen, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist.

Definition 12.6

Sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. $A = (a_{ij})$ heißt **obere Dreiecksmatrix** (bzw. **untere Dreiecksmatrix**), falls $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (bzw. $i < j$) ist. Ist $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$, handelt es sich um eine **Diagonalmatrix**.

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ist obere Dreiecksmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ist Diagonalmatrix und damit auch obere/untere Dreiecksmatrix}$$

Satz 12.7 (Eigenwerte von Dreiecksmatrizen)

Ist $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix, so sind die Eigenwerte durch die Diagonaleinträge gegeben.

Beweis:

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonaleinträge.

Für $A = (a_{ij})$ folgt also aus $0 = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda)$, dass die Eigenwerte durch $\lambda_1 = a_{11}, \dots, \lambda_n = a_{nn}$ gegeben sind.

q.e.d.

12.8 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{hat die Eigenwerte 3 und } -1 \quad (\text{vgl. Beispiel 12.2})$$

12.9 Bestimmung der Eigenvektoren

Annahme: Eigenwert λ der Matrix A sei bekannt.

Dann sind die zugehörigen Eigenvektoren nichttriviale Lösungen von

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (*)$$

Eigenvektoren sind **nicht** eindeutig bestimmt:

mit v ist auch αv mit $\alpha \neq 0$ Eigenvektor.

Der Lösungsraum von $(*)$ heißt **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ .

Man sucht daher nach Basisvektoren im Eigenraum und gibt diese als Eigenvektoren an.

12.10 Beispiel

$$\text{Bestimme Basen der Eigenräume von } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \dots = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

$\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ sind also Eigenwerte.

i) Eigenraum zu $\lambda = 2$ ist Lösungsraum von

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das sind 3 linear abhängige Gleichungen mit der Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ -s \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zwei Basisvektoren sind z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) Eigenraum zu $\lambda = 1$ ist Lösungsraum von

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. und dritte Gleichung sind linear abhängig.

Addition von Gleichung 1 und 2: $x_2 - x_3 = 0$

Setze $x_2 = s \Rightarrow x_3 = s$

in Gleichung 3: $x_1 = -2x_3 = -2s$

Eindimensionaler Eigenraum $\left\{ \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ wird z.B. von Basisvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

Satz 12.11 (Eigenwerte von Potenzen einer Matrix)

Sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ und sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Dann ist λ^k Eigenwert von A^k zum Eigenvektor v .

Beweis:

$$\begin{aligned} A^k v &= A^{k-1}(Av) = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda A^{k-1}v \\ &= \lambda A^{k-2}(Av) = \lambda^2 A^{k-2}v \\ &= \dots = \lambda^k v \end{aligned}$$

λ^k ist also Eigenwert von A^k zum Eigenvektor v .

q.e.d.

Beispiel 12.12

A^7 mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 12.10 hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1^7 = 1$ und

$$\lambda_2 = 2^7 = 128.$$

Die Eigenvektoren werden von A übernommen.