

§11 Orthogonale Matrizen

Definition 11.1

Hat eine Matrix $Q \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ **orthonormale** Spalten $q_1, \dots, q_n$, so handelt es sich um eine **orthogonale Matrix** (orthonormale Matrix wäre präziser, ist aber unüblich).

Man definiert ferner:

$$O(n) := \{Q \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid Q \text{ ist orthogonal}\}$$

Satz 11.2

Ist $Q \in O(n)$, so gilt:

- a) Q ist sehr einfach zu invertieren: $Q^{-1} = Q^T$
- b) Multiplikation mit Q erhält das euklidische Produkt:

$$(Qu) \cdot (Qv) = u \cdot v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

- c) Multiplikation mit Q erhält die euklidische Norm:

$$|Qu| = |u| \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

Man nennt Q daher auch **Isometrie**.

Beweis:

- a) Sei $A = (a_{ij}) := QQ^T$. Dann gilt:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n q_{ik} q_{jk} = q_i \cdot q_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Also ist $QQ^T = I$. Analog zeigt man $Q^T Q = I$.

Somit ist $Q^T = Q^{-1}$

- b) $(Qu) \cdot (Qv) = \underbrace{(Qu)^T (Qv)}_{\text{Matrixmultiplikation}} = u^T \underbrace{Q^T Q}_I v = u \cdot v$

- c) folgt aus (b) mit $u = v$.

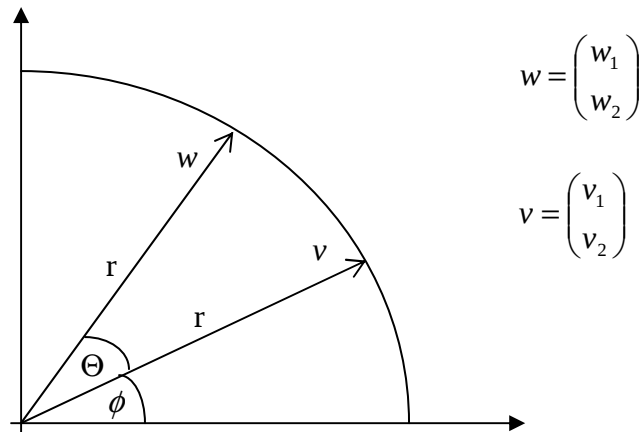
q.e.d.

11.3 Beispiele

- a) Rotationen sind orthogonale Matrizen. Für $n = 2$:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

beschreibt Drehung um Winkel Θ , denn



$$v_1 = r \cdot \cos \phi$$

$$v_2 = r \cdot \sin \phi$$

$$\begin{aligned} w_1 &= r \cdot \cos(\phi + \Theta) \\ &= r \cdot (\cos \phi \cos \Theta - \sin \phi \sin \Theta) \\ &= v_1 \cos \Theta - v_2 \sin \Theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= r \cdot \sin(\phi + \Theta) \\ &= r \cdot (\cos \phi \sin \Theta + \sin \phi \cos \Theta) \\ &= v_2 \cos \Theta + v_1 \sin \Theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix ist die Drehung um $-\Theta$:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\Theta) & -\sin(-\Theta) \\ \sin(-\Theta) & \cos(-\Theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} = Q^T$$

Q ist also orthogonal.

Beachte: $\det(Q) = \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta = 1$

b) Es gibt auch orthogonale Matrizen, die keine Drehungen sind, z.B.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q beschreibt Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden, denn Q vertauscht x - und y -Komponente:

$$Q \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Beachte: $\det(Q) = 0 - 1 = -1$

Kann die Determinante orthogonaler Matrizen auch andere Werte als ± 1 annehmen?
Nein!

Satz 11.4 (Determinante orthogonaler Matrizen)

Ist $Q \in O(n)$, so gilt $|\det(Q)| = 1$.

Beweis:

Aus $Q^T Q = I$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 = \det(I) &= \det(Q^T Q) = \det(Q^T) \det(Q) \\ &= (\det(Q))^2 \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

Orthogonale Matrizen Q mit $\det(Q) = +1$ sind gesondert ausgezeichnet.

Definition 11.5

$$SO(n) := O^+(n) := \{Q \in O(n) \mid \det(Q) = 1\}$$

Satz 11.6 (Gruppeneigenschaft von $O(n)$ und $SO(n)$)

$O(n)$ und $SO(n)$ sind Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ invertierbar}\}$.

Bemerkung:

Man nennt $O(n)$ die **orthogonale Gruppe** und $SO(n)$ die **spezielle orthogonale Gruppe**.

Beweis:

Übungsaufgabe

Wo treten orthogonale Matrizen noch auf?

Beim Wechsel von einer Orthonormalbasis zu einer anderen.

11.7 Wechsel zwischen Orthonormalbasen

Problem:

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalbasis des euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$. Dann existieren zu jedem

$u \in V$ eindeutig bestimmte Koeffizienten $a_1, \dots, a_n$ mit $u = \sum_{k=1}^n a_k v_k$.

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ heißt **Koordinatenvektor** von u bezüglich $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Sei nun $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine weitere Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.

u habe Koordinatenvektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ bezüglich $\{w_1, \dots, w_n\}$.

Gibt es eine Übergangsmatrix Q mit $b = Qa$?

Lösung:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^n a_k v_k \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{i=1}^n (v_k^T w_i) w_i \right) && v_k \text{ durch } \{w_1, \dots, w_n\} \text{ ausgedrückt} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n a_k (v_k^T w_i)}_{=: b_i} \right) w_i && \text{Vertauschung der Summation} \end{aligned}$$

Für die gesuchte Übergangsmatrix $Q = (q_{ik})$ gilt also:

$$q_{ik} = v_k^T w_i = w_i^T v_k$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{pmatrix} (v_1, \dots, v_n)}$$

Q ist das Produkt zweier orthogonaler Matrizen und somit selbst orthogonal.