

§10 Fourierreihen

Ziel: Ähnlich wie eine Taylorreihe eine Funktion durch ein Polynom approximiert, wollen wir eine Funktion durch ein trigonometrisches Polynom approximieren.
Wir verwenden den Approximationssatz 9.18.

10.1 Herleitung der Fourierkoeffizienten

Gegeben:

- Vektorraum $V = C[0, 2\pi]$ mit Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} u(x)v(x)dx \quad \text{und Norm } \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

- Funktion $u \in V$
- endlich dimensionaler Unterraum:

$$W := \text{span} \left\{ \underbrace{1}_{v_0}, \underbrace{\cos x}_{v_1}, \underbrace{\cos(2x)}_{v_2}, \dots, \underbrace{\cos(nx)}_{v_n}, \underbrace{\sin(x)}_{v_{n+1}}, \underbrace{\sin(2x)}_{v_{n+2}}, \dots, \underbrace{\sin(nx)}_{v_{2n}} \right\}$$
 trigonometrische Polynome vom Grad $\leq n$

Gesucht:

Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, so dass

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

die beste Approximation an u bezüglich $\|\cdot\|$. („**Approximation im quadratischen Mittel**“)

Diese Koeffizienten heißen **Fourierkoeffizienten**.

Lösung:

Nach Satz 9.18 ist die Approximation im quadratischen Mittel durch die Orthogonalprojektion $f = \text{proj}_W u$ gegeben.

Nach Übungsblatt 1, Aufgabe 3 sind $\{1, \cos x, \dots, \sin(nx)\}$ linear unabhängig.

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \pi & (k = l) \end{cases} \quad k, l \geq 1$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(lx) dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \pi & (k = l \geq 1) \\ 2\pi & (k = l = 0) \end{cases}$$

Nach Satz 9.15 lautet die Orthogonalprojektion

$$\begin{aligned} f &= \text{proj}_W u = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\langle u, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle u, 1 \rangle + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} (\langle u, \cos(kx) \rangle \cos(kx) + \langle u, \sin(kx) \rangle \sin(kx)) \end{aligned}$$

Somit lauten die Fourierkoeffizienten

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \langle u, 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \langle u, \cos(kx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \cos(kx) dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \langle u, \sin(kx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \sin(kx) dx \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

10.2 Beispiel

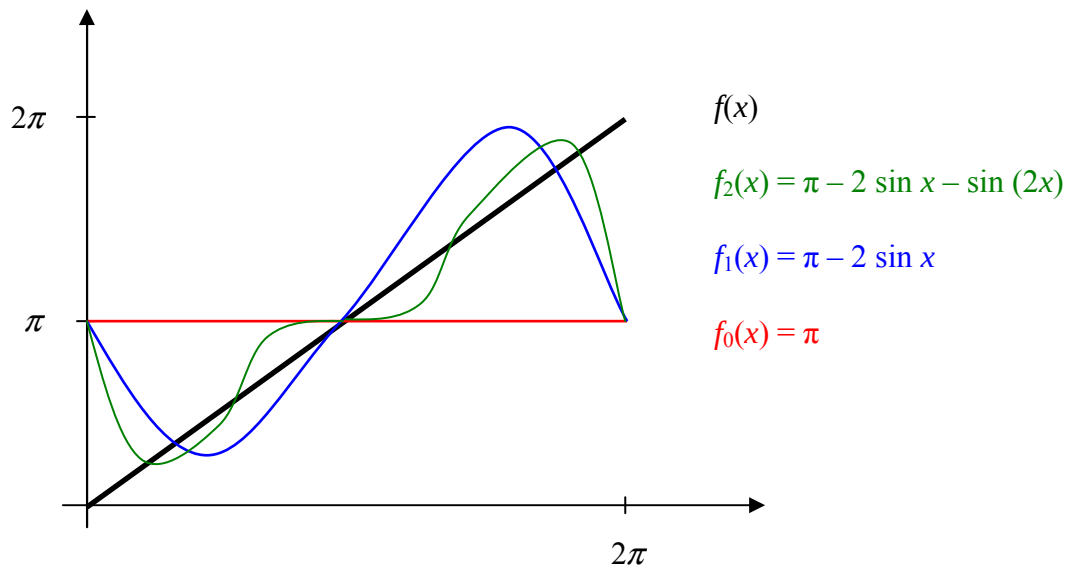
Die Funktion $u(x) = x$ soll auf $[0, 2\pi]$ im quadratischen Mittel mit einem trigonometrischen Polynom vom Grad $\leq n$ approximiert werden.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{x \frac{1}{k} \sin(kx)}_0 \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2} \cos(kx) \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{für } k \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{k} \cos(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-2\pi \frac{1}{k} \right] + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k^2} \sin(kx) \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{k} \quad (k \geq 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_n(x) = \pi - 2 \left(\sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots + \frac{\sin(nx)}{n} \right)$$



Definition 10.3

Lässt man den Grad des trigonometrischen Approximationspolynoms gegen ∞ gehen, entsteht die **Fourierreihe**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \cos(kx) dx \quad k = 0, 1, \dots$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \sin(kx) dx \quad k = 1, 2, \dots$$

Bemerkung:

Falls u differenzierbar ist, kann man zeigen, dass die Fourierreihe punktweise gegen u konvergiert.

An Sprungstellen zeigen die Fourierpolynome Über- und Unterschwingungen (**Gibbs-Phänomen**).

10.4 Praktische Bedeutung

- Fourierreihen sind unentbehrlich in der Signal- und Bildverarbeitung (Bilder sind 2D-Signale)
- Fourierkoeffizienten eines Signals geben die Anteile der einzelnen Frequenzen an.
 a_k, b_k mit kleinem k : tiefe Frequenzen
 a_k, b_k mit großem k : hohe Frequenzen
- Filterentwurf durch Spezifikation im Frequenzbereich
 - a) **Tiefpassfilter**: dämpfen hohe Frequenzen (z.B. Rauschen)
 - b) **Hochpassfilter**: dämpfen tiefe Frequenzen (z.B. Rumpeln, Brummen)
 - c) **Bandpassfilter**: lassen nur vorgegebene Frequenzbereiche passieren (z.B. mittlerer Frequenzbereich bei Stimmübertragung)