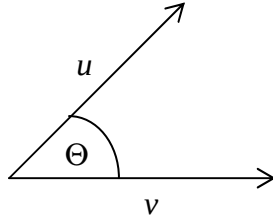


## §9 Orthogonalität

### Der Winkel zwischen Vektoren

Motivation:



Das euklidische Produkt zweier Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , die einen Winkel  $\Theta$  einschließen, lautet:

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \Theta.$$

Für orthogonale Vektoren  $u, v$  ist  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ .

Somit ist  $u \cdot v = 0$ .

### Definition 9.1

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Prä-Hilbert-Raum über  $\mathbb{R}$  mit induzierter Norm  $\|\cdot\|$ . Für nicht verschwindende Vektoren  $u, v \in V$  gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl  $\Theta \in [0, \pi]$  mit

$$\cos \Theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|},$$

die wir als **Winkel** zwischen  $u$  und  $v$  definieren.

$u$  und  $v$  heißen **orthogonal**, falls  $\langle u, v \rangle = 0$  (somit  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ) ist.

### 9.2 Beispiele

a) Euklidischer Raum  $\mathbb{R}^4$ ,

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\|u\| = (16 + 9 + 1 + 4)^{1/2} = \sqrt{30}$$

$$\|v\| = (4 + 1 + 4 + 9)^{1/2} = \sqrt{18}$$

$$u \cdot v = \langle u, v \rangle = -8 + 3 + 2 - 6 = -9$$

$$\cos \Theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{-9}{\sqrt{30} \sqrt{18}} \approx -0,3873$$

$$\Rightarrow \Theta \approx 1,968 \cong 112,8^\circ$$

b)  $C[-1,1]$  mit Skalarprodukt  $\langle u, v \rangle := \int_{-1}^1 u(x) \cdot v(x) dx$ . Mit  $u(x) := x$  und  $v(x) := x^2$  ergibt sich

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \quad (\text{auch wegen Symmetrie})$$

Die Funktionen  $u(x) = x$  und  $v(x) = x^2$  sind also orthogonal in  $C[-1,1]$  bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Satz 7.12 verallgemeinern wir zu:

### Satz 9.3 (Satz des Pythagoras in Prä-Hilbert-Räumen)

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Prä-Hilbert-Raum über  $\mathbb{R}$  und  $\|\cdot\|$  die induzierte Norm.

Dann gilt für orthogonale Vektoren  $u, v \in V$ :

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

**Beweis:**

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + \underbrace{2\langle u, v \rangle}_{=0} + \|v\|^2 \quad \text{q.e.d.}$$

### 9.4 Beispiel

$C[-1,1]$  mit Skalarprodukt  $\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx$

Nach 9.2 b) sind  $u(x) = x$  und  $v(x) = x^2$  orthogonal.

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \int_{-1}^1 (x + x^2)^2 dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 2x^3 + x^4) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{16}{15}}} \end{aligned}$$

$$\|u\|^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \quad \|v\|^2 = \int_{-1}^1 x^4 dx = \left[ \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5}$$

Wie erwartet gilt also:

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15} = \|u + v\|^2$$

In Prä-Hilbert-Räumen ist es oft sinnvoll, Basen zu wählen, deren Elemente paarweise orthogonal sind.

## Definition 9.5

Eine Menge von Vektoren in einem Prä-Hilbert-Raum heißt **orthogonale Menge**, wenn ihre Elemente paarweise orthogonal sind. Haben sie außerdem die (induzierte) Norm 1, so heißt die Menge **orthonormal**.

Bildet eine Basis eines Prä-Hilbert-Raums eine orthogonale (orthonormale) Menge, spricht man von einer **Orthogonalbasis** (**Orthonormalbasis**).

## 9.6 Beispiel

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ bilden eine orthogonale Menge im euklidischen Raum } \mathbb{R}^3,$$

denn es gilt:

$$0 = u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_3 = u_1 \cdot u_3.$$

Zwar ist  $|u_1| = 1$ , aber wegen  $|u_2| = \sqrt{2} = |u_3|$  ist  $\{u_1, u_2, u_3\}$  keine orthonormale Basis.

Um eine orthonormale Menge  $\{v_1, v_2, v_3\}$  zu erhalten, muss man durch die euklidischen Normen dividieren:

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

## Satz 9.7 (Koordinatendarstellung in Orthonormalbasis)

Sei  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Orthonormalbasis eines endlich dimensionalen Prä-Hilbert-Raums  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

Dann gilt für jeden Vektor  $u \in V$ :

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n$$

**Beweis:**

Da  $S$  Basis ist, existieren eindeutig bestimmte  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  mit  $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$

$$\Rightarrow \langle u, v_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle$$

Wegen  $\langle v_i, v_k \rangle = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ 1 & (i = k) \end{cases}$  ist also  $\langle u, v_k \rangle = \alpha_k$  für  $k = 1, \dots, n$ . q.e.d.

## 9.8 Beispiel

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}$  bilden eine Orthonormalbasis im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$ .

Man schreibe  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  als Linearkombination von  $v_1, v_2, v_3$ .

$$u \cdot v_1 = 1, \quad u \cdot v_2 = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}, \quad u \cdot v_3 = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} + \frac{7}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

## Satz 9.9 (Koordinatendarstellung in Orthogonalbasis)

Sei  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Orthogonalbasis eines endlich dimensionalen Prä-Hilbert-Raums  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

Dann gilt für jedes  $u \in V$ :

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

**Beweis:**

Aus der Orthogonalbasis  $S$  erhält man durch Normierung die Orthonormalbasis

$S' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$ . Nach Satz 9.7 gilt:

$$u = \left\langle u, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \dots + \left\langle u, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\rangle \frac{v_n}{\|v_n\|} = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n \quad \text{q.e.d.}$$

**Bemerkung:**

Unter Zusatzvoraussetzungen gelten ähnliche Aussagen auch in unendlich dimensionalen Räumen.

### Satz 9.10 (Lineare Unabhängigkeit orthogonaler Mengen)

Eine orthogonale Menge  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  mit von 0 verschiedenen Elementen ist linear unabhängig.

**Beweis:**

Wir zeigen, dass aus  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$  stets  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$  folgt.

Sei also  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ . Dann gilt für jedes  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle = \alpha_k \|v_k\|^2, \text{ da } \langle v_i, v_k \rangle = 0 \text{ für } i \neq k \\ \Rightarrow \alpha_k &= 0 \text{ für } k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

### 9.11 Beispiel

Aus Beispiel 9.6 wissen wir, dass  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$  eine orthonormale Menge im

euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  ist.

Nach Satz 9.10 handelt es sich also um eine Orthonormalbasis.

Nach Satz 9.10 wissen wir, dass orthogonale Mengen linear unabhängig sind. Kann man umgekehrt aus einer linear unabhängigen Menge eine orthogonale Menge konstruieren?

### 9.12 Der Orthogonalisierungsalgorithmus von Gram und Schmidt

**Gegeben:**

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Prä-Hilbert-Raum mit endlich dimensionalem Unterraum  $W$ .

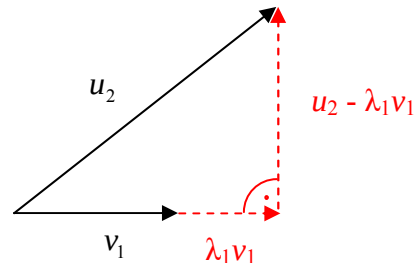
$W$  habe Basis  $\{u_1, \dots, u_n\}$ .

**Gesucht:**

Orthogonalbasis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $W$ .

**Schritt 1:**  $v_1 := u_1$

**Schritt 2:**



Ansatz:  $v_2 := u_2 - \lambda_1 v_1$  mit Forderung  $\langle v_2, v_1 \rangle \stackrel{!}{=} 0$  erlaubt Bestimmung von  $\lambda_1$ :

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \langle v_2, v_1 \rangle = \langle u_2 - \lambda_1 v_1, v_1 \rangle \\ &= \langle u_2, v_1 \rangle - \lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle \quad \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

**Schritt n:** Seien  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  orthogonal für  $n \geq 2$ .

Ansatz:  $v_n := u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$  mit Forderungen  $\langle v_n, v_j \rangle = 0$  für  $j = 1, \dots, n-1$   
führt auf:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \langle v_n, v_j \rangle = \left\langle u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i, v_j \right\rangle \\ &= \langle u_n, v_j \rangle - \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_j = \frac{\langle u_n, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \quad \Rightarrow v_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert somit einen konstruktiven Beweis von:

### Satz 9.13 (Existenz einer Orthogonalbasis)

Jeder endlich dimensionale Prä-Hilbert-Raum besitzt eine Orthogonalbasis.

**Bemerkung:**

Durch Normierung entsteht eine Orthonormalbasis.

## 9.14 Beispiel

Konstruiere aus  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit dem Gram-Schmidt-Algorithmus eine Orthogonalbasis des euklidischen Raums  $\mathbb{R}^3$ .

**Schritt 1:**  $v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Schritt 2:**  $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

**Schritt 3:** 
$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1/3}{2/3} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$  ist die gesuchte Orthogonalbasis.

Ein „Abfallprodukt“ des Gram-Schmidt-Verfahrens ist der

## Satz 9.15 (Orthogonalprojektion auf Unterräume)

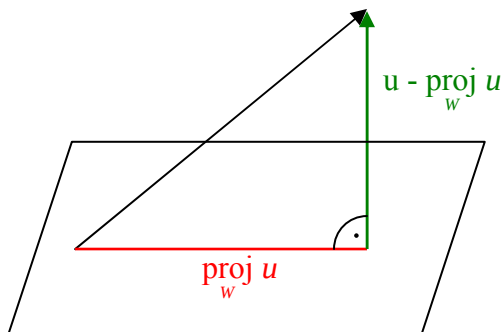
Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Prä-Hilbert-Raum,  $u \in V$  und sei  $W$  ein endlich dimensionaler Unterraum mit Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

Dann beschreibt

$$\text{proj}_W u := \sum_{i=1}^n \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

eine **Orthogonalprojektion** von  $u$  auf  $W$ , d.h.

$$\text{proj}_W u \in W \text{ und } \left\langle u - \text{proj}_W u, w \right\rangle = 0 \quad \forall w \in W$$

**Bemerkung:**

Ist  $\{v_1, \dots, v_n\}$  **Orthonormalbasis**, gilt  $\text{proj}_W u = \sum_{i=1}^n \langle u, v_i \rangle v_i$ .

Ist die Orthogonalprojektion eindeutig?

**Definition 9.16**

Sei  $W$  ein Unterraum eines Prä-Hilbert-Raums  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Dann bezeichnet

$$W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

das **orthogonale Komplement** von  $W$ .

**Satz 9.17 (Projektionssatz)**

Sei  $W$  ein endlich dimensionaler Unterraum eines Prä-Hilbert-Raums  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

Dann besitzt jedes  $v \in V$  eine **eindeutige** Darstellung  $v = w_1 + w_2$  mit  $w_1 \in W$  und  $w_2 \in W^\perp$ .  
(d.h.  $V = W \oplus W^\perp$ ).

**Beweis:**

Es ist nur die Eindeutigkeit zu zeigen (Existenz: Satz 9.15).

Sei  $w_1, w_1' \in W$  und  $w_2, w_2' \in W^\perp$  mit

$$\begin{aligned} v &= w_1 + w_2 = w_1' + w_2' \\ \Rightarrow w_1 - w_1' &= w_2' - w_2 \end{aligned}$$

$$\text{Es gilt: } \langle w_2' - w_2, w \rangle = \underbrace{\langle w_2', w \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle w_2, w \rangle}_{=0} = 0$$

d.h.  $w_2' - w_2 \in W^\perp$ .

Andererseits:  $\underline{w_2' - w_2} = w_1 - w_1' \in W$ , da  $W$  abgeschlossen

$$\Rightarrow 0 = \left\langle \underbrace{w_2' - w_2}_{\in W^\perp}, \underbrace{w_2' - w_2}_{\in W} \right\rangle = \|w_2' - w_2\|^2$$

$$\Rightarrow 0 = w_2' - w_2 = w_1 - w_1'$$

$$\Rightarrow w_2' = w_2, w_1' = w_1 \quad \text{q.e.d.}$$

Gibt es weitere Anwendungen der Orthogonalprojektion?

### Satz 9.18 (Approximationssatz)

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Prä-Hilbert-Raum mit induzierter Norm  $\|\cdot\|$  und  $W$  ein endlich dimensionaler Unterraum.

Zu jedem  $v \in V$  ist dann  $\text{proj}_W v$  die beste Approximation von  $v$  in  $W$ , d.h.

$$\left\| v - \text{proj}_W v \right\| < \left\| v - w \right\| \quad \forall w \in W \text{ mit } w \neq \text{proj}_W v$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \left\| \underbrace{v - \text{proj}_W v}_{\in W^\perp} + \underbrace{\text{proj}_W v - w}_{\in W} \right\|^2 \\ &= \left\| v - \text{proj}_W v \right\|^2 + \left\| \text{proj}_W v - w \right\|^2 \quad \text{Pythagoras} \\ &\geq \left\| v - \text{proj}_W v \right\|^2 \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $w = \text{proj}_W v$ . q.e.d.

### 9.19 Beispiel

$$V = C\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ mit Skalarprodukt } \langle u, v \rangle := \int_0^{\pi/2} u(x)v(x)dx.$$

Bestimme die Gerade, die die Funktion  $u(x) = \sin x$  im Intervall  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  am besten bzgl. der induzierten Norm approximiert.

**Lösung:**

$$W = \text{span} \{1, x\}$$

Unterraum aller Geraden

„Erzeugnis“

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ v_1 \quad v_2 \end{array}$$

Gesucht:  $\text{proj}_W u = \sum_{i=1}^2 \lambda_i v_i$  mit  $0 = \left\langle u - \sum_{i=1}^2 \lambda_i v_i, v_k \right\rangle \quad k=1,2$

Bei uns:  $0 = \langle \sin x - \lambda_1 - \lambda_2 x, 1 \rangle$   
 $0 = \langle \sin x - \lambda_1 - \lambda_2 x, x \rangle$

ergibt lineares Gleichungssystem mit Unbekannten  $\lambda_1, \lambda_2$

$$\lambda_1 \langle 1, 1 \rangle + \lambda_2 \langle x, 1 \rangle = \langle \sin x, 1 \rangle$$

$$\lambda_1 \langle 1, x \rangle + \lambda_2 \langle x, x \rangle = \langle \sin x, x \rangle$$

Mit  $\langle 1, 1 \rangle = \int_0^{\pi/2} 1 \cdot 1 dx = \frac{\pi}{2}$

$$\langle x, 1 \rangle = \langle 1, x \rangle = \int_0^{\pi/2} x dx = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\langle \sin x, 1 \rangle = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 0 + 1 = 1$$

$$\langle x, x \rangle = \int_0^{\pi/2} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$$

$$\langle \sin x, x \rangle = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \dots = 1$$

lautet das System:

$$\begin{pmatrix} \pi/2 & \pi^2/8 \\ \pi^2/8 & \pi^3/24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:  $\lambda_1 = 8 \cdot \left( \frac{\pi - 3}{\pi^2} \right) \approx 0,11$

$$\lambda_2 = 24 \cdot \left( \frac{4 - \pi}{\pi^3} \right) \approx 0,66$$

Beste Approximation:  $g(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$

