

c) **Polynomräume**

Seien $p = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $q = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ Polynome vom Grad $\leq n$.

Dann wird durch $\langle p, q \rangle := \sum_{k=0}^n a_k b_k$ der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ zum Prä-Hilbert-Raum

d) **Funktionsraum** $C[a, b]$

Sei $C[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig auf } [a, b]\}$ und seien $f, g \in C[a, b]$.

Dann wird $C[a, b]$ mit

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

zum Prä-Hilbert-Raum.

Lässt sich die euklidische Norm verallgemeinern?

Definition 8.3

Sei V ein reeller Vektorraum.

Unter einer **Norm** auf V versteht man eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$
- (ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- (iii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \quad \forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- (iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$

$(V, \|\cdot\|)$ heißt **normierter Raum**.

Bemerkung:

Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

Satz 8.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in Prä-Hilbert-Räumen)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Prä-Hilbert-Raum. Dann gilt:

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle \quad \forall u, v \in V$$

Beweis:

Falls $u = 0$, so sind beide Seiten gleich 0.

Sei also $u \neq 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \langle ux + v, ux + v \rangle = \underbrace{\langle u, u \rangle}_{:=a} x^2 + 2 \underbrace{\langle u, v \rangle}_{:=b} x + \underbrace{\langle v, v \rangle}_{:=c}$$

Die Parabel $ax^2 + bx + c$ hat demnach höchstens eine reelle Nullstelle.

Die Diskriminante $b^2 - 4ac$ ist daher nicht positiv:

$$0 \geq b^2 - 4ac = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

Daraus folgt die Behauptung.

q.e.d.

Satz 8.5 (Induzierte Norm von Prä-Hilbert-Räumen)

Jeder Prä-Hilbert-Raum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wird mit

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \forall v \in V$$

zum normierten Raum.

Beweis:

(i), (ii) folgen unmittelbar aus Definition 8.1 (iv)

$$(iii): \quad \|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} \stackrel{Hom.}{=} \sqrt{\alpha \langle v, \alpha v \rangle} \stackrel{Sym.}{=} \sqrt{\alpha \langle \alpha v, v \rangle} \stackrel{Hom.}{=} \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} = |\alpha| \|v\|$$

$$\begin{aligned} (iv): \quad \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \\ &\stackrel{8.4}{\leq} \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\sqrt{\langle u, v \rangle \langle u, v \rangle} \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

q.e.d.

8.6 Beispiele

a) **Norm einer stetigen Funktion:**

$$C[a, b] \text{ wird mit } \|f\| := \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall f \in C[a, b] \text{ zum normierten Raum.}$$

z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $[1, 2]$:

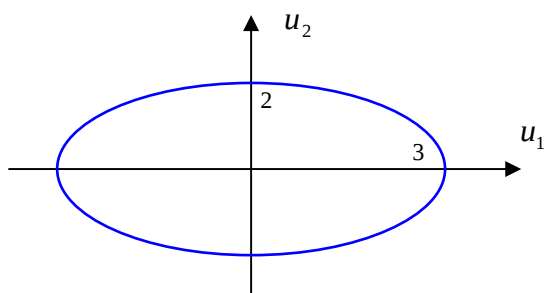
$$\|f\| = \left(\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left[-\frac{1}{x} \right]_1^2} = \sqrt{-\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

b) **Gewichtete euklidische Norm**

Der $\mathbb{R}^2$ versehen mit $\langle u, v \rangle = \frac{1}{9}u_1v_1 + \frac{1}{4}u_2v_2 \quad \forall u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ induziert

die Norm $\|u\| = \sqrt{\frac{1}{9}u_1^2 + \frac{1}{4}u_2^2}$.

Der Einheitskreis bzgl. dieser Norm – d.h. die Menge aller $u \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\| = 1$ – ist gegeben durch $\frac{u_1^2}{9} + \frac{u_2^2}{4} = 1$. Das ist eine Ellipsengleichung $\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} = 1$ mit den Halbachsen $a = 3$, $b = 2$.



Lässt sich auch der euklidische Abstand verallgemeinern?

Definition 8.7

Sei V Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Eine Abbildung $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik**, falls gilt:

- (i) $d(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in V$
- (ii) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- (iii) $d(u, v) = d(v, u) \quad \forall u, v \in V$
- (iv) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \quad \forall u, v, w \in V$

(V, d) heißt **metrischer Raum**.

Bemerkung:

Es gibt keinen speziellen Namen für vollständige metrische Räume.

Satz 8.8 (Induzierte Metrik eines normierten Raumes)

Jeder normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ definiert mit $d(u, v) := \|u - v\| \quad \forall u, v \in V$ einen metrischen Raum.

Beweis:

einfache Folgerung aus Definition 8.3

q.e.d.

Beispiel 8.9

Metrik auf $C[a, b]$:

Für $f, g \in C[a, b]$ kann man durch $d(f, g) := \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ eine Metrik erklären.

Ist z.B. $f(x) = 5x$, $g(x) = 2x - 1$, so lautet die Metrik auf $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \left(\int_0^1 (3x + 1)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 9x^2 + 6x + 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left[3x^3 + 3x^2 + x \right]_0^1 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7} \end{aligned}$$