

TEIL B: LINEARE ALGEBRA

§7 Euklidische Vektorräume

Definition 7.1

Sei $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Die Vektoren u und v heißen **gleich**, falls $u_i = v_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Die **Summe** von u und v ist definiert durch $u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)^T$

und das **skalare Vielfache** αv durch $\alpha v = (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n)^T$

Bemerkung:

- a) Der **Nullvektor** im $\mathbb{R}^n$ lautet $0 = (0, \dots, 0)^T$
- b) Das **additive Inverse** $-u$ eines Vektors u lautet

$$-u = (-u_1, \dots, -u_n)^T$$
- c) Die **Differenz** zweier Vektoren u und v lautet

$$u - v = u + (-v) = (u_1 - v_1, \dots, u_n - v_n)^T$$

Mit der in Definition 7.1 definierten Addition und der Skalarmultiplikation wird der $\mathbb{R}^n$ zu einem Vektorraum:

Satz 7.2 (Vektorraumeigenschaften des $\mathbb{R}^n$)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- a) $(\mathbb{R}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe
 - (i) Kommutativgesetz: $u + v = v + u$
 - (ii) Assoziativgesetz: $(u + v) + w = u + (v + w)$
 - (iii) neutrales Element: $u + 0 = 0 + u = u$
 - (iv) inverses Element: $u + (-u) = 0$
- b) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
- c) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- d) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
- e) $1 \cdot v = v$

Beweis:

Einfaches Anwenden von Definition 7.1 (Übungsaufgabe)

Definition 7.3

Seien $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ und $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Das **euklidische Produkt** $u \cdot v$ wird definiert durch $u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

Beispiel 7.4

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u \cdot v = (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-4) + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 0 = 18$$

Bemerkung:

$\mathbb{R}^n$ versehen mit dem euklidischen Produkt nennt man auch **n-dimensionalen euklidischen Raum**.

Satz 7.5 (Eigenschaften des euklidischen Produkts)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

- a) $u \cdot v = v \cdot u$
- b) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
- c) $(\alpha u) \cdot v = \alpha(u \cdot v)$
- d) $v \cdot v \geq 0$
Außerdem $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Beweis: (Wir zeigen nur (b) und (d))

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (u + v) \cdot w &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)^T \cdot (w_1, \dots, w_n)^T \\ &= \sum_{i=1}^n (u_i + v_i) \cdot w_i \\ &= \sum_{i=1}^n u_i w_i + \sum_{i=1}^n v_i w_i \\ &= u \cdot w + v \cdot w \end{aligned}$$

$$\text{(d)} \quad v \cdot v = \underbrace{v_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{v_2^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{v_n^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$$v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v_1 = \dots = v_n = 0 \quad \text{d.h. } v = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Definition 7.6

Die **euklidische Norm** eines Vektors $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$|v| := \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

Der **euklidische Abstand** zweier Vektoren $u = (u_1, \dots, u_n)$ und $v = (v_1, \dots, v_n)$ ist definiert durch

$$d(u, v) := |u - v| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}.$$

Beispiel 7.7

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|u| = \sqrt{1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 7 \cdot 7} = \sqrt{1 + 9 + 4 + 49} = \sqrt{63}$$

$$d(u, v) = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{1 + 16 + 16 + 25} = \sqrt{58}$$

Satz 7.8 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$$

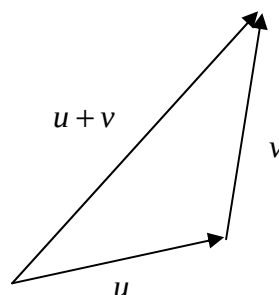
Beweis:

später...

Satz 7.9 (Eigenschaften der euklidischen Norm)

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- a) $|u| \geq 0$
- b) $|u| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- c) $|\alpha u| = |\alpha| \cdot |u|$
- d) $|u + v| \leq |u| + |v|$



Die Summe der Längen zweier Dreiecksseiten ist nie kleiner als die Länge der dritten.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad |\alpha u| &= \sqrt{(\alpha u_1)^2 + (\alpha u_2)^2 + \dots + (\alpha u_n)^2} \\
 &= |\alpha| \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} \\
 &= |\alpha| \cdot |u|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad |u+v|^2 &= (u+v) \cdot (u+v) \\
 &= u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v \\
 &= |u|^2 + 2u \cdot v + |v|^2 \\
 &\leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 && \text{(nach Cauchy-Schwarz)} \\
 &= (|u| + |v|)^2 \\
 \Rightarrow |u+v| &\leq |u| + |v| && \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Satz 7.10 (Eigenschaften des euklidischen Abstands)

Für $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

- a) $d(u, v) \geq 0$
- b) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- c) $d(u, v) = d(v, u)$

Beweis:

einfache Folgerung aus 7.9

Definition 7.11

Zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, falls $u \cdot v = 0$.

Beispiel:

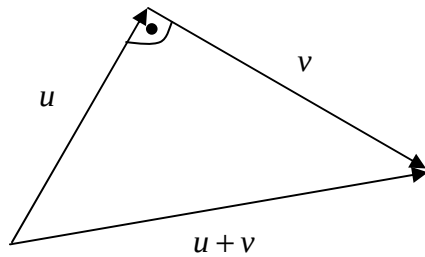
$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u \cdot v = -2 + 6 + 0 - 4 = 0 \quad u \text{ und } v \text{ sind orthogonal}$$

Für orthogonale Vektoren folgt aus der Dreiecksungleichung

Satz 7.12 (Satz des Pythagoras im $\mathbb{R}^n$)

Sind $u, v \in \mathbb{R}^n$ orthogonal, so gilt

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$



Hypothenusenquadrat
= Summe der Kathetenquadrate

Beweis:

$$|u+v|^2 = (u+v)(u+v) = |u|^2 + \underbrace{2uv}_0 + |v|^2 \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiel:

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{sind orthogonal (letztes Beispiel)}$$

$$|u|^2 = 4 + 9 + 1 + 16 = 30$$

$$|v|^2 = 1 + 4 + 0 + 1 = 6$$

$$u+v = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|u+v|^2 = 1 + 25 + 1 + 9 = 36 = |u|^2 + |v|^2 \quad \checkmark$$

Interpretation des euklidischen Produkts als Matrizenmultiplikation

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$. Dann kann man das euklidische Produkt $u \cdot v$ als Multiplikation der $(1 \times n)$ -Matrix u^T mit der $(n \times 1)$ -Matrix v auffassen.

$$u \cdot v = u^T \cdot v$$

Beispiel:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$u^T \cdot v = (1, -3, 7, 4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 4 \cdot 9 = 37$$

Beachte: Vektoren in $\mathbb{R}^n$ sind bei uns stets Spaltenvektoren.