

§6 Ausblick: Mehrfachintegrale

Funktionen können von mehreren Variablen abhängen, z.B.

$$f(x, y) = x^2 - 3y$$

Funktionen mehrerer Variablen können auch als Integrand auftreten.

Beispiel: Gammafunktion (vgl. 3.9)

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Betrachte jetzt eigentliche Integrale der Form $F(x) = \int_a^b f(x, y) dy$ mit $x \in I$.

Satz 6.1 (Stetigkeit parameterabhängiger Integrale)

Ist $f(x, y)$ stetig auf $I \times [a, b]$, so existiert $F(x) = \int_a^b f(x, y) dy$ für alle $x \in I$ und $F(x)$ ist auf I stetig.

Beweis:

Sei $I_0 \subset I$ ein kompaktes Intervall und $x_0 \in I_0$.

Dann ist $f(x, y)$ auf dem Kompaktum $I_0 \times [a, b]$ gleichmäßig stetig. Also:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, x_0 \in I_0 \quad \forall y \in [a, b]: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$$

Ist zu gegebenem $\varepsilon > 0$ nun $|x - x_0| < \delta$, so folgt

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^b (f(x, y) - f(x_0, y)) dy \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, y) - f(x_0, y)| dy \\ &\leq \varepsilon (b - a) \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Somit ist $F(x)$ in x_0 stetig.

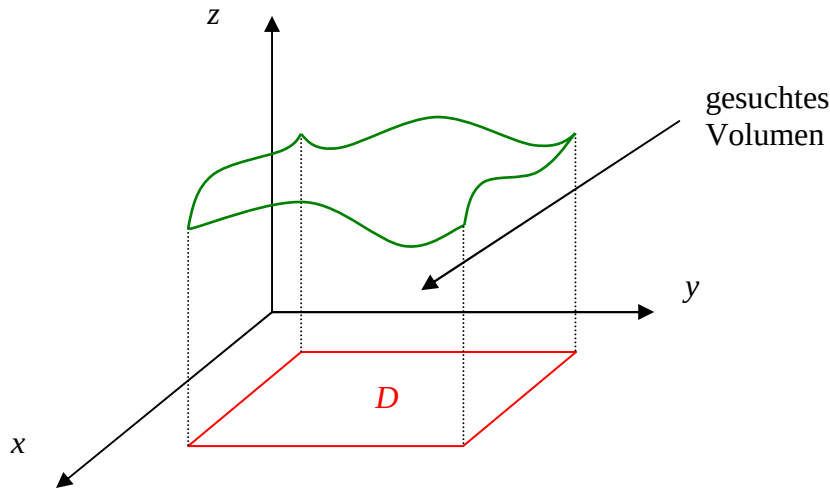
q.e.d.

Doppelintegrale

Gegeben: Rechteckiger Definitionsbereich $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

Funktion zweier Variablen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Ziel: Berechnung des Volumens unterhalb des Graphen von f



Definition 6.2

- a) $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$ heißt **Zerlegung** des Rechtecks $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, falls
- $$a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b_1$$
- $$a_2 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = b_2$$

$Z(D)$ ist die **Menge aller Zerlegungen** von D , und $\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$ die **Feinheit** einer Zerlegung $Z \in Z(D)$.

- b) Zu einer Zerlegung Z heißen die Mengen $Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ die **Teilquader** von Z und $\text{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ der **Flächeninhalt** von Q_{ij} .
- c) $U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in Q_{ij}} (f(x,y)) \cdot \text{vol} Q_{ij}$ Untersumme
- $$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{(x,y) \in Q_{ij}} (f(x,y)) \cdot \text{vol} Q_{ij} \quad \text{Obersumme}$$

Für beliebige Punkte $x_{ij} \in Q_{ij}$ der jeweiligen Teilquader heißt

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(x_{ij}) \cdot \text{vol} Q_{ij}$$

eine **Riemann-Summe** zur Zerlegung Z .

Bemerkung 6.3

Analog zur Bemerkung 1.3 gelten folgende Aussagen:

- a) Die Riemann-Summe liegt zwischen Unter- und Obersumme
- $$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

- b) Entsteht eine Zerlegung Z_2 aus Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i und/oder y_j , so gilt:

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \quad , \quad O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

- c) Für beliebige $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(D)$ gilt:

$$U_f(Z_1) \leq U_f(Z_2)$$

Definition 6.4

- a) Die Grenzwerte

$$\underbrace{\iint_D f(x, y) dx dy}_{\text{Unt}} := \sup \{U_f(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}(D)\}$$

$$\underbrace{\iint_D f(x, y) dx dy}_{\text{Ober}} := \inf \{O_f(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}(D)\}$$

heißen **Unter-** bzw. **Oberintegral** von f über D .

- b) $f(x, y)$ heißt (**Riemann-)integrierbar** über D , falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen. Dann heißt

$$\iint_D f(x, y) dx dy := \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy$$

das (**Riemann-)Integral** von f über D .

Der **Beweis** geht ähnlich wie im 1-D Fall.

Satz 6.5 (Eigenschaften des Doppelintegrals)

- a) **Linearität**

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- b) **Monotonie**

Gilt $f(x, y) \leq g(x, y)$ für alle $(x, y) \in D$, so folgt:

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$$

- c) **Nichtnegativität**

$$f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in D \quad \Rightarrow \quad \iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$$

- d) **Zusammensetzung von Integrationsintervallen**

Sind D_1, D_2 und D Rechtecke mit $D = D_1 \cup D_2$ und gilt $\text{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist $f(x, y)$ genau dann über D integrierbar, falls $f(x, y)$ über D_1 und D_2 integrierbar ist.

Dann gilt:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

e) **Riemann-Kriterium**

$f(x, y)$ ist genau dann über D integrierbar, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Z \in \mathcal{Z}(D) : O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$$

f) **Integrierbarkeit stetiger Funktionen**

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(x, y)$ integrierbar über D .

Lassen sich mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale Integrale reduzieren?

Satz 6.6 (Satz von Fubini)

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und existieren $F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$ bzw.

$G(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$ für alle $x \in [a_1, b_1]$ und $y \in [a_2, b_2]$, so gilt:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx \quad \text{bzw.}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy$$

Beispiel 6.7

Sei $D = [0, 1] \times [0, 2]$ und $f(x, y) = 2 - xy$.

Da $f(x, y)$ auf D stetig ist, ist f integrierbar.

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 (2 - xy) dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left[2x - \frac{x^2 y}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^2 \left(2 - \frac{y}{2} \right) dy \\ &= \left[2y - \frac{y^2}{4} \right]_0^2 = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

Bemerkung 6.8

- a) Das Doppelintegral $\iint_D f(x,y) dx dy$ beschreibt das Volumen zwischen dem Graphen von $f(x,y)$ und der x - y -Ebene.
- b) Die vorangegangenen Betrachtungen gelten sinngemäß auch für Dreifachintegrale, Vierfachintegrale usw.