

§5 Kurven und Bogenlänge

Idee: Bewegung eines Punktes definiert Kurve im Raum, die durch Angabe des Ortes $c(t)$ zur Zeit t beschrieben wird.

Definition 5.1

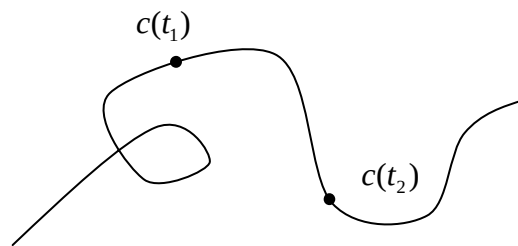
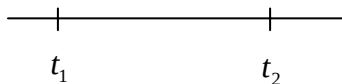
Eine **(parametrisierte) Kurve** in $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \rightarrow (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, deren Komponentenfunktionen $x_1, \dots, x_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

c heißt **differenzierbar (bzw. stetig differenzierbar, C^1 -Kurve)**, wenn alle x_i differenzierbar (stetig differenzierbar) sind.

Bezeichnung der Ableitung von $c(t)$:

$$\dot{c}(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T$$

Das Bild $c([a, b])$ heißt **Spur** von c .



Bemerkung:

Verschiedene Kurvenparametrisierungen können zur selben Spur führen.

$$c_1(t) := (\cos t, \sin t) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

und

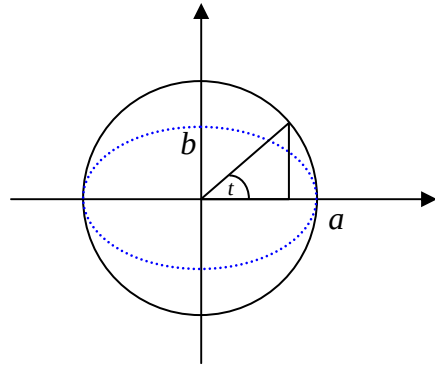
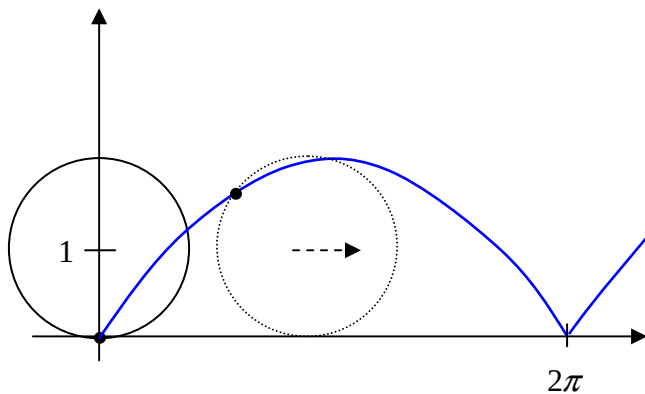
$$c_2(t) := (\cos t, -\sin t) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

haben Einheitskreis als Spur, unterscheiden sich aber im Durchlaufsinne.

5.2 Beispiele

(a) **Ellipse** mit Hauptachsen a und b

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cdot \cos t \\ y(t) &= b \cdot \sin t \end{aligned} \quad t \in [0, 2\pi]$$

(b) **Zykloide**

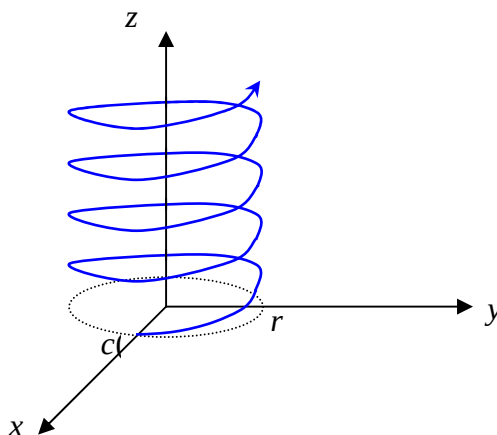
$$\begin{aligned} x(t) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 - \cos t \end{aligned}$$

Überlagerung der Mittelpunktswegung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und eine Kreisbewegung } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \text{ im Uhrzeigersinn}$$

(c) **Schraubenlinie**

$$c(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, ht)^T, \quad t \in \mathbb{R}$$



Überlagerung einer
Kreisbewegung mit Radius r
in x - y -Ebene mit linearer
Bewegung in z -Richtung

Definition 5.3

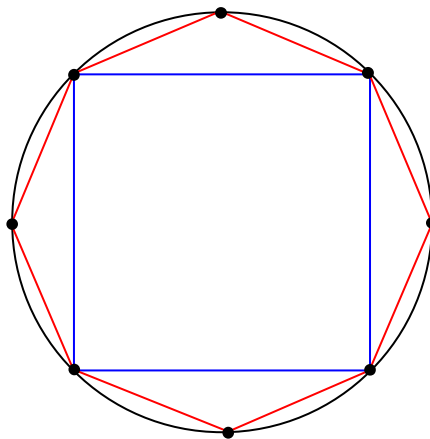
Sei $c:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h:[\alpha,\beta] \rightarrow [a,b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die „neue“ Kurve $\tilde{c}(\tau) = c(h(\tau))$, $\tau \in [\alpha,\beta]$ dieselbe Spur und den selben Durchlaufsinne wie c .

Man nennt $t = h(\tau)$ einen **Parameterwechsel (Umparametrisierung)**.

Kurven, die durch einen Parameterwechsel auseinander hervorgehen, werden als gleich angesehen. Ist c stetig differenzierbar, so werden nur stetig differenzierbare Funktionen $h:[\alpha,\beta] \rightarrow [a,b]$ mit $h'(\tau) > 0$ als Parameterwechsel zugelassen. (**C^1 -Parameterwechsel**).

Länge einer Kurve

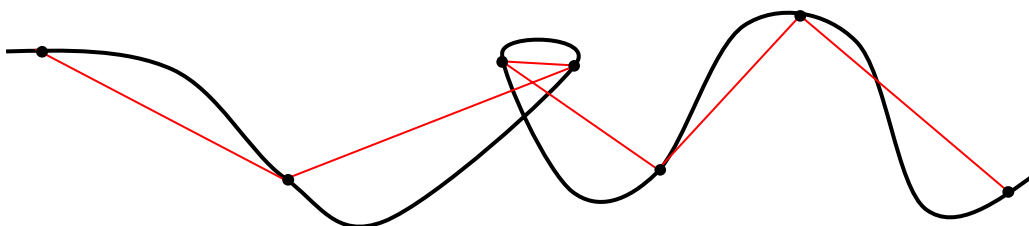
Motivation: Kreisumfang



Approximiere Kreis durch eingeschriebene regelmäßige 2^n -Ecke ($n \geq 2$). Ihre Umfänge s_n wachsen monoton in n und sind von oben beschränkt (z.B. Umfang eines umschriebenen Quadrats).

Somit existiert $\sup_n(s_n)$. Es definiert den Kreisumfang.

Allgemein:



Approximiere die Kurve $c(t)$ durch einen Polygonzug.

Für eine Zerlegung $Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ von $[a, b]$ ist seine Länge gegeben durch

$$L(Z) = \sum_{i=0}^{m-1} |c(t_{i+1}) - c(t_i)|$$

Damit bezeichnet $|(x_1, \dots, x_n)^T| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ die euklidische Norm des Vektors $(x_1, \dots, x_n)^T$.

Definition 5.4

Ist die Menge $\{L(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}[a, b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve c **rektifizierbar**, und

$$L(c) = \sup\{L(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}[a, b]\}$$

heißt **Länge** der Kurve c .

Satz 5.5 (Länge von C^1 -Kurven)

Jede C^1 -Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und es gilt:

$$L(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt$$

Beweis:

Für eine Zerlegung Z gilt:

$$\begin{aligned} L(Z) &= \sum_{i=0}^{m-1} |c(t_{i+1}) - c(t_i)| \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k(t_{i+1}) - x_k(t_i))^2} && \text{(Definition der Norm)} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{x}_k(\tau_{k_i}))^2 (t_{i+1} - t_i)} && \text{(Mittelwertsatz)} \\ &\quad \text{mit } \tau_{k_i} \in [t_i, t_{i+1}] \end{aligned}$$

Für die Rechtecksumme von $\int_a^b |\dot{c}(t)| dt$ gilt:

$$R(Z) = \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{x}_k(t_i))^2 (t_{i+1} - t_i)}$$

Zur Abschätzung von $|L(Z) - R(Z)|$ verwenden wir die gleichmäßige Stetigkeit von $\dot{x}_k(t)$ auf dem Kompaktum $[a, b]$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad |\tilde{t} - t| < \delta \Rightarrow |\dot{x}_k(\tilde{t}) - \dot{x}_k(t)| < \varepsilon \quad \forall k$$

Gilt nun für ein gegebenes $\varepsilon > 0$, dass für die Feinheit $\|Z\|$ der Zerlegung Z die Abschätzung $\|Z\| < \delta$, so folgt

$$\begin{aligned} |L(Z) - R(Z)| &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{x}_k(\tau_{k_i}))^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{x}_k(t_i))^2} (t_{i+1} - t_i) \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^n \underbrace{(\dot{x}_k(\tau_{k_i}) - \dot{x}_k(t_i))^2}_{\leq \varepsilon^2}} (t_{i+1} - t_i) \quad [|a| - |b| \leq |a - b|] \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^n \varepsilon^2} (t_{i+1} - t_i) = \sqrt{n} \cdot \varepsilon \cdot (b - a) \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

5.6 Beispiel

Kreisumfang: $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_0^{2\pi} |\dot{c}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} r dt \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

Warum ist die Kurvenlänge wichtig?

Lemma 5.7

Die Länge einer C^1 -Kurve ist parametrisierungsinvariant.

Beweis:

Mit einem C^1 -Parameterwechsel $h: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$:

$$\begin{aligned} L(c(h(\cdot))) &= \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{c}(h(\tau)) \cdot h'(\tau)| d\tau \quad (\text{Kettenregel}) \\ &= \int_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} |\dot{c}(h(\tau))| \cdot \underbrace{h'(\tau) d\tau}_{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t=a}^{t=b} |\dot{c}(t)| dt && \text{(Substitutions-Regel)} \\
 &= L(c) && \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Definition 5.8

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Kurve.

Die Funktion $S(t) := \int_a^t |\dot{c}(\tau)| d\tau$, $t \in [a, b]$ heißt die **Bogenlängenfunktion** von c .

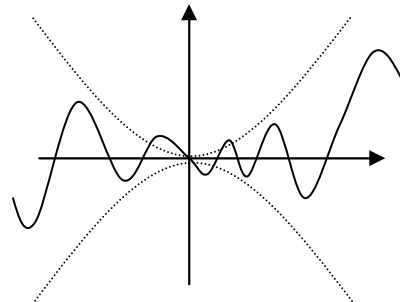
Bedeutung: Repräsentiert man eine Kurve in Bogenlängenparametrisierung, so vereinfachen sich viele Formeln.

Bemerkung zur stetigen Differenzierbarkeit

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn f auf $[a, b]$ differenzierbar und f' stetig ist. Diese Eigenschaft ist stärker als die Differenzierbarkeit.

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$



f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, f' jedoch in 0 unstetig.

Sei $x \neq 0$

f ist differenzierbar

$$f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

hat keinen Grenzwert für $x \rightarrow 0$

Sei $x = 0$

f ist differenzierbar, denn

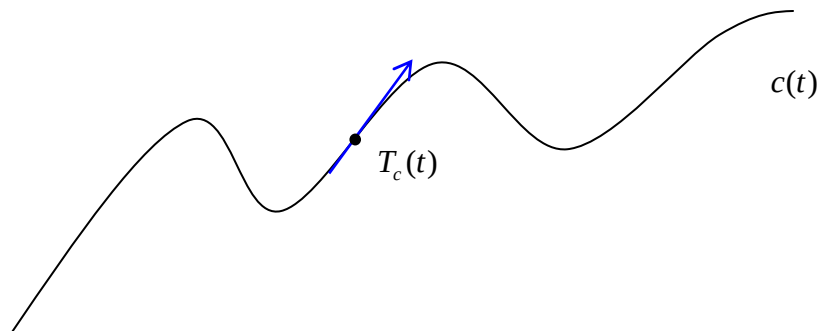
$$\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h - 0} = h \sin \frac{1}{h} \rightarrow 0 = f'(0)$$

Damit ist $f'(x)$ in 0 unstetig.

Definition 5.9

Sei $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Kurve. Dann nennt man $\dot{c}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t))^T$ auch **Tangentenvektor (Geschwindigkeitsvektor)** der Kurve c an der Stelle t .

Für $\dot{c}(t) \neq 0$ heißt $T_c(t) = \frac{\dot{c}(t)}{|\dot{c}(t)|}$ der **Tangenteneinheitsvektor**.



Bemerkung:

Bei Bogenlängenparametrisierung (!) ist $|\dot{c}(s)| = 1$

d.h. $T_c(s) = \dot{c}(s)$ ist bereits Tangenteneinheitsvektor

Aus $1 = |\dot{c}(s)|^2 = \dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)$ folgt durch Differentiation nach s :

$$0 = 2 \dot{x} \ddot{x} + 2 \dot{y} \ddot{y} = 2 \left\langle \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$

$$\left(\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle = ac + bd \right)$$

Somit steht der bei Bogenlängenparametrisierung berechnete **Beschleunigungsvektor**

$$\ddot{c}(s) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(s) \\ \ddot{y}(s) \end{pmatrix} \text{ senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor } \dot{c}(s) = \begin{pmatrix} \dot{x}(s) \\ \dot{y}(s) \end{pmatrix}.$$

Man nennt $N(s) := \ddot{c}(s) / |\ddot{c}(s)|$ den **Hauptnormalenvektor** und $\kappa(s) := |\ddot{c}(s)|$ die **Krümmung** von $c(s)$.

Beispiel 5.10

Krümmung eines Kreises mit Radius r

$$x(s) = m_1 + r \cos\left(\frac{s}{r}\right)$$

$$y(s) = m_2 + r \sin\left(\frac{s}{r}\right)$$

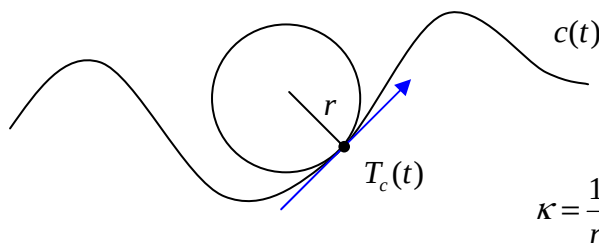
$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{x}(s) &= -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \\ \dot{y}(s) &= \cos\left(\frac{s}{r}\right) \end{aligned} \right\} \quad \dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1$$

bereits in Bogenlängenparametrisierung

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \ddot{x}(s) &= -\cos\left(\frac{s}{r}\right) \frac{1}{r} \\ \ddot{y}(s) &= -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \frac{1}{r} \end{aligned} \right\} \quad \kappa(s) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{1}{r}$$

Bemerkung:

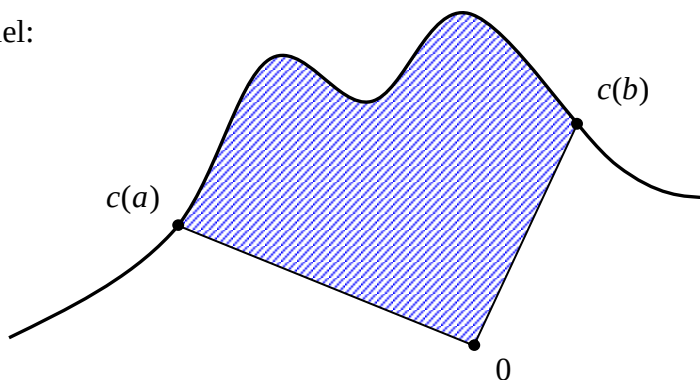
Allgemein gilt: Die Krümmung gibt den inversen Radius des Kreises an, der sich an der Stelle t an die Kurve $c(t)$ „anschmiegt“ (Schmiegekreis).



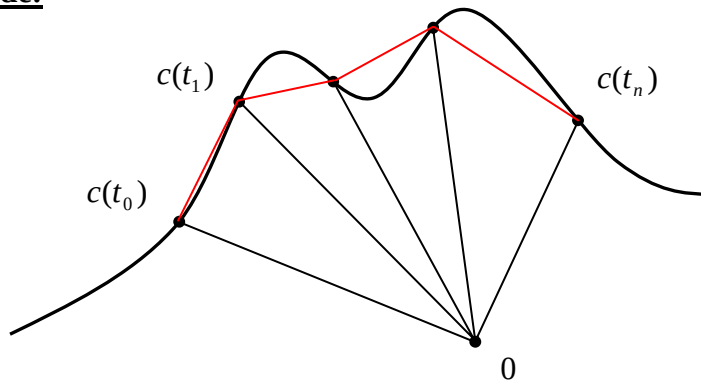
Der Schmiegekreis besitzt die selbe Tangente und die selbe Krümmung wie die Kurve.

Die Sektorfläche

Ziel:



Bestimme Flächeninhalt, den der Fahrstrahl von 0 nach $c(t)$ für $t \in [a, b]$ überstreicht.

Methode:

approximierende Dreiecksflächen

Zerlegung $Z = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$

Man kann zeigen (z.B. Schule):

Die Fläche des aus 0 , $c(t_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, $c(t_{i+1}) = \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$ gebildeten Dreiecks:

$$\frac{1}{2} |c(t_i) \times c(t_{i+1})| = \frac{1}{2} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

Gesamtfläche:
$$A(Z) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

Definition 5.11

Der Fahrstrahl an die Kurve $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ überstreicht den **(orientierten) Flächeninhalt** $F(c)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $\|Z\| \leq \delta$ gilt:

$$|A(Z) - F(c)| \leq \varepsilon$$

Satz 5.12 (Sektorformel von Leibniz)

Sei $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann überstreicht der Ortsvektor $c(t)$ im Zeitintervall $t \in [a, b]$ die Fläche

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_a^b (x \dot{y} - y \dot{x}) dt$$

Beweis:

Ähnlich zum Beweis von Satz 5.5

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es in $[t_i, t_{i+1}]$ Stellen $\tau_i, \tilde{\tau}_i$ mit

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= \dot{x}(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) \\ y_{i+1} - y_i &= \dot{y}(\tilde{\tau}_i)(t_{i+1} - t_i) \end{aligned} \right\} (*)$$

Somit gilt für die Summen der Dreiecksflächen

$$\begin{aligned} A(Z) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_i y_i + x_i y_i - x_{i+1} y_i) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \dot{y}(\tilde{\tau}_i) - y_i \dot{x}(\tau_i)) (t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

Wir vergleichen $A(Z)$ mit der Riemann-Summe

$$R(Z) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) (t_{i+1} - t_i)$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ so gewählt, dass gilt

(i) Für jede Zerlegung Z mit $\|Z\| \leq \delta$ ist

$$\left| R(Z) - \frac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - y\dot{x}) dt \right| < \varepsilon$$

(ii) Für alle Paare $t, s \in [a, b]$ mit $|t - s| \leq \delta$ ist

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(s)| \leq \varepsilon, \quad |\dot{y}(t) - \dot{y}(s)| \leq \varepsilon$$

Sei Z Zerlegung von $[a, b]$ mit $\|Z\| \leq \delta$ und sei M obere Schranke für $|x(t)|$ und $|y(t)|$ auf $[a, b]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |A(Z) - R(Z)| &\leq \frac{M}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (|\dot{y}(\tilde{\tau}_i) - \dot{y}_i| + |\dot{x}(\tau_i) - \dot{x}_i|) (t_{i+1} - t_i) \\ &\leq \varepsilon M \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = \varepsilon M (b - a) \end{aligned}$$

Mit (i):

$$\left| A(Z) - \frac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - y\dot{x}) dt \right| \leq \varepsilon [M(b-a) + 1] \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0$$

Nach Definition 5.11 folgt die Behauptung.

q.e.d.

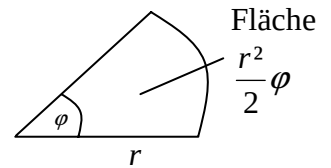
5.13 Beispiele

- a) Der Fahrstrahl an den Kreisbogen

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad t \in [0, \varphi]$$

überstreicht die orientierte Fläche

$$\frac{1}{2} \int_0^\varphi (x\dot{y} - y\dot{x}) dt = \frac{1}{2} \int_0^\varphi (r \cos t \cdot r \cos t + r \sin t \cdot r \sin t) dt = \frac{r^2}{2} \varphi$$



- b) Der Fahrstrahl an den Zykloidenbogen

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

überstreicht die orientierte Fläche

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin t - (1 - \cos(t))^2 dt = \dots = -3\pi$$