

§4 Numerische Verfahren zur Integration

werden auch **Quadraturformeln** genannt.

Gegeben: $I[f] = \int_a^b f(x) dx$ für Funktion $f(x)$, die auf $[a, b]$ hinreichend oft stetig differenzierbar ist

Quadraturformeln führen dieses Integral in eine Summe über

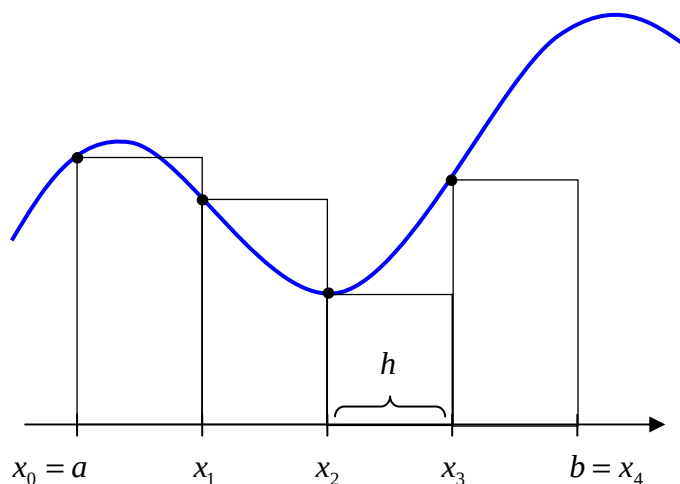
$$I[f] \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad \text{Quadraturformel}$$

$$x_i \in [a, b] \quad , i = 0, \dots, n \text{ Knoten}$$

$$w_i \quad , i = 0, \dots, n \text{ Gewichte}$$

Praktisch brauchbar sind nur Quadraturformeln mit **nichtnegativen** Gewichten. Sie garantieren die Nichtnegativität der Approximation für nichtnegative Integranden sowie Gutartigkeit gegenüber Rundungsfehlern.

4.1 Einfachstes Beispiel: Rechteckregel



$$x_i = a + \frac{i}{n}(b - a) \quad i = 0, \dots, n \text{ Knoten}$$

$$h = \frac{b - a}{n} \quad \text{Gitterweite}$$

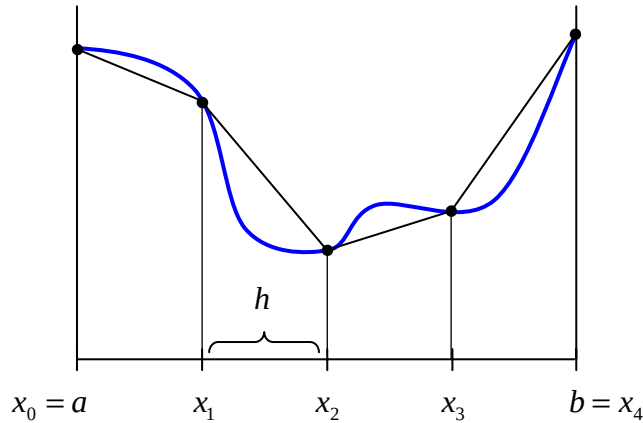
$$R_h[f] = \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f(x_i)$$

Im Allgemeinen ist die Rechteckregel nicht sehr genau, solange man nicht sehr viele Knoten verwendet.

Grund: $f(x)$ wird im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ durch **Konstante** $f(x_i)$ approximiert.

4.2 Zweiteinfachstes Beispiel: Trapezregel

Idee: approximiere $f(x)$ in $[x_i, x_{i+1}]$ durch **Gerade** durch die Punkte $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$



Fläche aller Trapeze:

$$T_h[f] = \sum_{i=0}^{n-1} h \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

$$= \frac{h}{2} \cdot f(x_0) + h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + \dots + h \cdot f(x_{n-1}) + \frac{h}{2} \cdot f(x_n)$$

4.3 Newton-Cotes-Formeln

Idee: Genauere Quadraturformeln erhält man, indem man $f(x)$ stückweise durch Polynome höheren Grades ersetzt (Newton-Cotes-Formeln). Für zu große Grade treten negative Gewichte auf und die Formeln werden unbrauchbar.

Gewichte der Newton-Cotes-Formeln:

Polynomgrad	Gewichte pro Intervall					Name
0	1					Rechteckregel
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				Trapezregel
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			Simpson-Regel
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$ -Regel
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	Milne-Regel

Die Newton-Cotes-Formeln vom Grad n sind exakt für Polynome vom Grad $\leq n$.

Romberg-Quadratur

Idee: Fehlerterme in der Trapezregel sukzessive wegextrapolieren
Es gilt (Beweis aufwändig):

4.4 Satz (Euler-Maclaurinsche Summenformel)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar.

Dann hat die Trapezregel die asymptotische Fehlerentwicklung

$$T_h[f] = \int_a^b f(x) dx + c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots$$

mit Konstanten c_k , die von $f^{(2k+1)}(a)$, $f^{(2k+1)}(b)$ abhängen.

Konsequenz:

$$T_h[f] = \int_a^b f(x) dx + c_1 h^2 + c_2 h^4 + \underbrace{O(h^6)}_{\text{Terme der Ordnung } h^6}$$

$$T_{h/2}[f] = \int_a^b f(x) dx + c_1 \frac{h^2}{4} + c_2 \frac{h^4}{16} + O(h^6)$$

$$\frac{4 T_{h/2}[f] - T_h[f]}{3} = \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{4} c_2 h^4 + O(h^6)$$

quadratischer Fehlerterm wegextrapoliert

Ebenso kann man aus $T_h[f]$, $T_{h/2}[f]$, $T_{h/4}[f]$ die h^4 -Terme eliminieren und erhält ein Verfahren 6. Ordnung.

4.5 Satz (Romberg-Quadratur)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $2m + 2$ -mal stetig differenzierbar und $T_h[f]$ die Trapezapproximation an

$$\int_a^b f(x) dx \text{ mit Schrittweite } h.$$

Dann erhält man mit der Rekursionsformel

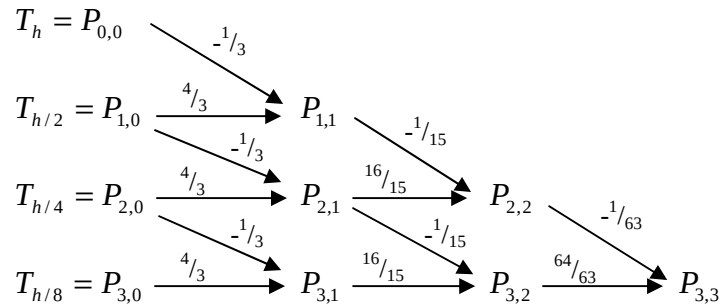
$$P_{k,0} = T_{h/2^k}[f] \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

$$P_{k,j} = \frac{4^j P_{k,j-1} - P_{k-1,j-1}}{4^{j-1}} \quad \begin{pmatrix} j = 1, \dots, m \\ k = j, \dots, m \end{pmatrix}$$

in $P_{m,m}$ eine Quadraturformel der Fehlerordnung $2m + 2$.

Beweis: Übungsaufgabe (vollständige Induktion)

4.6 Veranschaulichung



Fehlerordnung:

2

4

6

8

- schrittweise Intervallhalbierung
- vorangegangene Werte werden mit verwendet
- Abbruch der Verfeinerung, falls Approximationen $P_{m-1,m-1}$ und $P_{m,m}$ hinreichend ähnlich

4.7 Beispiel

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$$

h	$T_h[f]$	Romberg-Extrap.	Funktionsanwendungen
1	0,92073 54924	0,92073 54924	2
$1/2$	0,93979 32848	0,94614 58823	3
$1/4$	0,94451 35217	0,94608 30041	5
$1/8$	0,94569 08636	0,94608 30704	9
$1/16$	0,94508 50299	0,94608 30704	17
$\vdots$			
$1/32.768$	0,94608 30703		32.769

D.h. bei vergleichbarer Genauigkeit hat die Romberg-Quadratur den Aufwand um den Faktor 2.000 reduziert.