

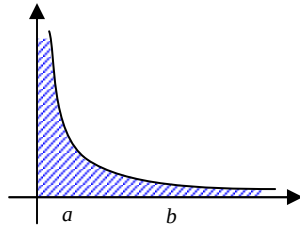
§3 Uneigentliche Integrale

Ziele:

a) Integration von Funktionen über unendlichen Intervallen

$$\int_a^\infty f(x) dx, \int_{-\infty}^b f(x) dx, \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

b) Integration unbeschränkter Funktionen



Unendliche Integrationsgrenzen

Definition 3.1

Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[a, R]$ mit $a < R < \infty$ integrierbar. Falls $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$

existiert, heißt $\int_a^\infty f(x) dx$ **konvergent**. Man setzt $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$.

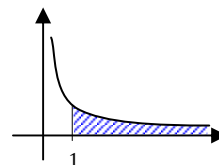
Analog definiert man $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ für $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Man setzt $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$ für $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel 3.2

Konvergiert $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ für $s > 1$?

$$\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_1^R = \frac{1}{s-1} \left(1 - \frac{1}{R^{s-1}} \right)$$



Da $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{s-1}} = 0$, folgt:

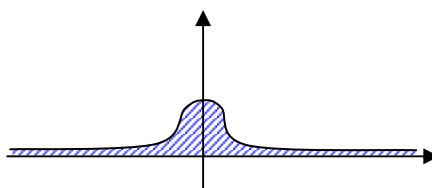
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} \quad \text{für } s > 1$$

Bemerkung:

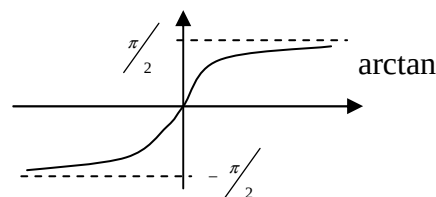
$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ ist divergent für $0 \leq s \leq 1$.

Beispiel 3.3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$



$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan(x) \Big|_{-R}^0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan(x) \Big|_0^R \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi \end{aligned}$$



Integration unbeschränkter Funktionen

Wie geht man vor, wenn der Integrand an einer der Integrationsgrenzen nicht definiert ist

(z.B. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$)?

Definition 3.4

Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ über jedem Teilintervall $[a + \varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b - a$ integrierbar. Falls

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ existiert, heißt $\int_a^b f(x) dx$ **konvergent**. Man setzt $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$.

Eine analoge Definition gilt, falls $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in b nicht definiert ist.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Falls $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in a und b nicht definiert ist, setzt man

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{mit } c \in (a, b).$$

Bemerkung:

Falls Polstellen im Innern des Integrationsbereichs vorliegen, spaltet man das Integral so in Teilintegrale auf, dass die Polstellen an den Grenzen der Teilintegrale liegen.

Beispiel 3.5

Konvergiert $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ für $0 < s < 1$?

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^s} &= \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{1-s} (1 - \varepsilon^{1-s}) \\ &\rightarrow \frac{1}{1-s} \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{Konvergenz} \end{aligned}$$

Bemerkung 3.6

$\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ konvergiert **nicht** für $s \geq 1$.

$$\begin{aligned} \underline{s=1}: \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} &= \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^1 = \ln 1 - \ln \varepsilon \\ &\rightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{s>1}: \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^s} &= \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{1-s} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{s-1}} \right) \\ &\text{divergiert für } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Für uneigentliche Integrale gibt es ähnliche Konvergenzkriterien wie für Reihen:

Satz 3.7 (Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale)

Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf jedem endlichen Intervall $[a, b]$.

a) **Cauchy-Kriterium**

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ existiert} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C > a : \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall z_1, z_2 > C$$

b) **Absolute Konvergenz**

Ist $\int_a^\infty |f(x)| dx$ konvergent (d.h. $\int_a^\infty f(x) dx$ **absolut konvergent**), so konvergiert auch

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

c) **Majorantenkriterium**

Ist $|f(x)| \leq g(x)$ für alle x und konvergiert $\int_a^\infty g(x) dx$, so konvergiert $\int_a^\infty f(x) dx$ absolut.

Gilt umgekehrt $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und divergiert $\int_a^\infty g(x) dx$, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x) dx$.

Bemerkung:

Entsprechende Aussagen gelten auch beim Integrationsintervall $(-\infty, b]$ sowie an Singularitäten an den Enden eines beschränkten Intervalls $[a, b]$.

Beispiel 3.8 (Das Dirichlet-Integral)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

Cauchy-Kriterium ergibt für $0 < z_1 < z_2$:

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin x}{x} dx &= \underset{\text{part. Integr.}}{-\frac{\cos x}{x}} \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos x}{x^2} dx \\ \left| \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin x}{x} dx \right| &\leq \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{dx}{x^2} \quad \rightarrow 0 \text{ für } z_1 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Beispiel 3.9 (Die Gammafunktion [Euler, 1707-1783])

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \text{ für } x > 0$$

Für $0 < x < 1$ divergiert der Integrand in $t = 0$.

Dort gilt: $e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1}$

Somit hat $\int_0^b e^{-t} t^{x-1} dt$ die konvergente Majorante $\int_0^b \frac{dt}{t^{1-x}}$ für endliches b (vgl. Beispiel 3.5)

Ist $\int_b^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ ebenfalls konvergent?

$|e^{-t} t^{x-1}| \leq \frac{c}{t^2}$, denn $c \cdot e^t \geq t^{x+1}$ (e-Funktion wächst schneller als jede Potenz)

Somit existiert eine konvergente Majorante und $\Gamma(x)$ existiert für alle $x > 0$.

Wozu ist die Gammafunktion nützlich?

$$(i) \quad \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 0 + 1 = 1$$

$$(ii) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_u \underbrace{t^{x-1}}_{v'} dt = \underbrace{e^{-t} \frac{1}{x} t^x \Big|_0^{\infty}}_0 + \underbrace{\frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt}_{\Gamma(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)}$$

Damit interpoliert $\Gamma(x)$ die Fakultät: $\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$

