

§2 Das unbestimmte Integral und Stammfunktionen

Ziel: Umkehrung der Differentiation

Definition 2.1

Gegeben seien Funktionen $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. F differenzierbar auf $[a, b]$ und gilt $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$, so heißt $F(x)$ **Stammfunktion** von $f(x)$.

Bemerkung: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F(x) + C$ Stammfunktion von $f(x)$.

Satz 2.2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

a) $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

(„Integration als Umkehrung der Differentiation“)

b) Ist $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$, so gilt: $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) =: F \Big|_a^b$

(„Stammfunktion als Mittel zum Lösen bestimmter Integrale“).

Beweis:

a) Sei $h \neq 0$ ($h < 0$ ebenfalls zugelassen) so, dass $x, x+h \in [a, b]$.

$$\left| \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x) - f(x)h) \right| = \frac{1}{|h|} \cdot \left| \underbrace{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}_{\int_x^{x+h} f(t) dt} - \int_x^{x+h} \underbrace{f(x)}_{\text{unabhängig von } t} dt \right|$$

$$= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \sup \{ |f(t) - f(x)| \mid t \text{ zwischen } x \text{ und } x+h \}$$

$\rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$, da f stetig.

Somit ist $F'(x) = f(x)$.

b) Mit (a) gilt: $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$

$$\Rightarrow F(b) = \int_a^b f(t)dt + C$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = C$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt \quad \text{q.e.d.}$$

Definition 2.3

Die Stammfunktion $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ wird auch als „das“ **unbestimmte Integral** bezeichnet.

Schreibweise: $\int f(x)dx$ (d.h. ohne Integrationsgrenzen).

Es ist jedoch nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Beispiele 2.4 (Stammfunktionen)

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (|x| \neq 0)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C \quad (|x| > 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad (|x| \neq 1)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad \left(\begin{array}{l} x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \quad \left(\begin{array}{l} x \neq k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C$$

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C \quad (x > 0)$$

Weitere Beispiele: Formelsammlungen,
z.B. Bronstein, Taschenbuch der
Mathematik

Wie löst man unbekannte Integrale?

Durch (z.T. trickreiches) Umformen in bekannte Integrale.
Hierzu gibt es zwei Grundtechniken.

Satz 2.5 (Integrationsregeln)**a) Partielle Integration:**

Sind $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

b) Substitutionsregel:

Zur Berechnung von $\int_c^d f(x) dx$ setze man $x = z(t)$, z stetig differenzierbar, $z(a) = c$,

$z(b) = d$ und formal $dx = z'(t) dt$:

$$\int_{x=c}^{x=d} f(x) dx = \int_{t=a}^{t=b} f(z(t)) \cdot z'(t) dt$$

Beweis:

a) Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

$$\text{integrieren: } \underbrace{\int_a^b (uv)' dx}_* = \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx \quad * uv \Big|_a^b$$

b) folgt aus Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(F(z(t))) = f(z(t)) \cdot z'(t) \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiele 2.6 (partielle Integration)

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} dx &= \underbrace{x \cdot e^x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} dx \\ &= x \cdot e^x - e^x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \ln x \, dx &= \int \underbrace{\ln x}_u \cdot \underbrace{1}_{v'} dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= x \cdot \ln x - x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \sin^2 x \, dx &= \sin x \cdot (-\cos x) + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx \quad \Big| + \int \sin^2 x \, dx \\ &\Rightarrow 2 \cdot \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int dx \\ &\Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

Beispiele 2.7 (Substitution)

a) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ Substitution: $z = \sqrt{x}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2z}$, $dx = 2z dz$

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= \int e^z \cdot 2z dz \\ &\stackrel{2.6a}{=} 2ze^z - 2e^z + C \\ &= 2\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C \quad (\text{Rücksubstitution}) \end{aligned}$$

Nicht alle Integrale lassen sich geschlossen lösen, obwohl sie einfach aussehen.

z.B.: Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt$ tabelliert

b) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ Substitution: $x = \cos z \Rightarrow \frac{dx}{dz} = -\sin z$

$$\begin{aligned} \int_{x=-1}^{x=1} \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{z=\pi}^{z=0} \underbrace{\sqrt{1-\cos^2 z}}_{\sin z} (-\sin z) dz \\ &= -\int_{\pi}^0 \sin^2 z dz = \int_0^{\pi} \sin^2 z dz \stackrel{2.6c}{=} -\frac{1}{2} \sin z \cos z + \frac{z}{2} \Big|_0^{\pi} \\ &= -0 + \frac{\pi}{2} - (0 + 0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Integration rationaler Funktionen 2.8

Rückführung auf bekannte Integrale mittels einer Partialbruchzerlegung

Beispiel: $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

Die Funktion $g(x) = x^2 - 5x + 6$ hat Nullstellen $x = 2$ und $x = 3$

Partialbruchzerlegung: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \\ &= \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{x^2 - 5x + 6} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $\left. \begin{aligned} A+B &= 0 \\ -3A-2B &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ hat Lösung } A = -1, B = 1$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} &= -\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C \\ &= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C\end{aligned}$$