

Mathematik für Informatiker II

Vorlesungsmitschrift von
Frank Schmidt

Korrektur gelesen von
Oliver Müller &
Daniela Reimer

Allgemeine Informationen

Prof. Dr. Joachim Weickert (Zimmer 407, Gebäude 27.1)

eMail: weickert@math.uni-sb.de

Vorlesungstermine: Mi-Fr 11-13 Uhr

Übungen: Listen im 4.Stock Gebäude 27

- maximal 3 Leute pro Übungsgruppe
- 50% aller Punkte notwendig, um zur Klausur zugelassen zu werden
- jeder muss in der Übungsgruppe 2 mal vorrechnen
- Übungsblätter sollen folgende Informationen enthalten: Namen, Übungsgruppenleiter, Seminarraum, Zeit

in Planung: Mailingliste, Vorlesungswebpage

Themen:

(A) Analysis: Integralrechnung, 1D

(B) Lineare Algebra: Skalarprodukte, Hauptachsentransformation

(C) Analysis: Mehrdimensionale Differentialrechnung

(D) Wahrscheinlichkeitstheorie

Literatur:

(1) Analysis

- Forster Otto: Analysis I, II
Vierweg, Wiesbaden, 1999 (je 16 €)
- Helmut Walter, Bernd I. Dahn
Analysis individuell, mit CD-ROM
Springer, Heidelberg, 2000 (20 €)
- Harro Henso, Lehrbuch der Analysis I, II
Tembner, Stuttgart, 2001 (je 30 €)

(2) Lineare Algebra

- Howard Anton: Lineare Algebra
Spektrum, Heidelberg, 1998
Taschenbuch (26 €)
- Max Koecher
Lineare Algebra und analytische Geometrie
Springer, 1999 (25 €)

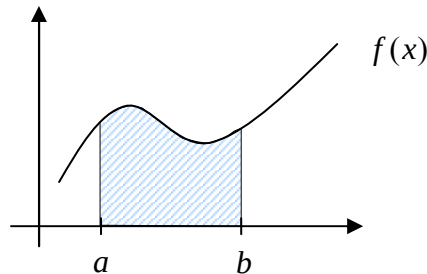
(3) Statistik

- Erwin Kreyszig
Statistische Methoden und ihre Anwendungen
Vandenhoeck & Ruprecht
Göttingen, 1997 (25 €)

TEIL A: INTEGRATION IN $\mathbb{R}$

Ziele: Sei $f(x)$, $x \in [a, b]$ reellwertige Funktion

1. Berechne **Fläche** zwischen $f(x)$ und x -Achse (**bestimmtes Integral**)



2. Umkehrung der Differentiation

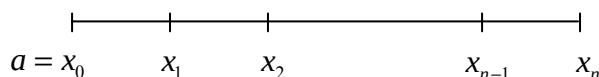
Suche Funktion **$F(x)$** mit $F'(x) = f(x)$ (**Stammfunktion: unbestimmtes Integral**)

§1 Das bestimmte Integral

Annahme $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

Definition 1.1

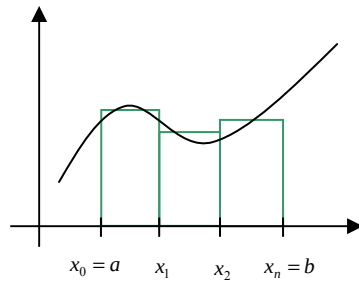
- a) Eine Menge der Form $Z = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ heißt **Zerlegung (Partition, Unterteilung)** des Intervalls $[a, b]$.



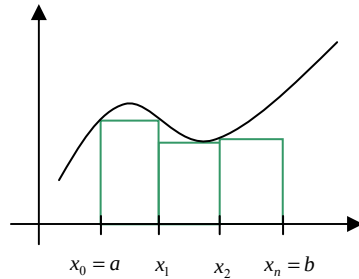
- b) $\|Z\| := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$ heißt **Feinheit** der Zerlegung Z .
- c) $Z[a, b]$: **Menge aller Zerlegungen** von $[a, b]$
- d) Eine Zerlegung Z_1 ist eine **feinere Zerlegung** als Z_2 ($Z_1 \supset Z_2$), falls Z_1 durch Hinzunahme von weiteren Knoten zu Z_2 entsteht.

Definition 1.2

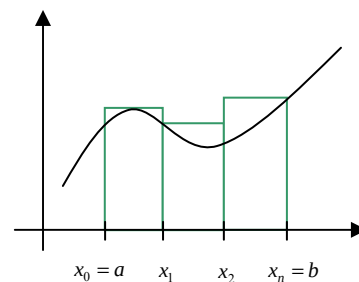
- a) Jede Summe der Form $R_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ heißt **Riemann-Summe** von f zur Zerlegung Z .



b) $U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i)$ heißt **Untersumme von f** zur Zerlegung Z .

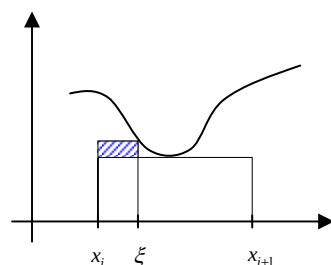


c) $O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i)$ heißt **Obersumme von f** zur Zerlegung Z .

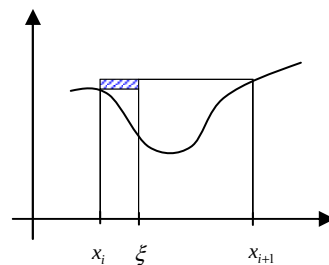


Bemerkung 1.3

- a) $U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$ für ein festes Z .
 b) Verfeinerungen vergrößern Untersummen, verkleinern Obersummen



$$U_f(Z_1) \geq U_f(Z_2)$$



$$O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2) \text{ für } Z_1 > Z_2$$

- c) Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, b]$ gilt stets:
 $U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$

Definition 1.4

- a) Auf Grund der obigen Eigenschaften existieren die Grenzwerte

$$\int_a^b f(x) dx := \sup \{ U_f(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}[a, b] \}$$

$$\int_a^b f(x) dx := \inf \{ O_f(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}[a, b] \}$$

Sie heißen **Riemannsches Unter- bzw. Oberintegral**.

- b) $f(x)$ heißt **Riemann-integrierbar** über $[a, b]$, wenn Ober- und Unterintegral übereinstimmen. Dann heißt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{Riemann-Integral von } f(x) \text{ über } [a, b].$$

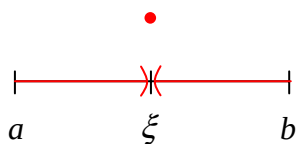
Beispiele 1.5

- a) Sei $f(x) = c = \text{const}$

$$\Rightarrow U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c \cdot (x_{i+1} - x_i) = c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = c \cdot (b - a)$$

D.h. $f(x)$ ist integrierbar mit $\int_a^b f(x) dx = c \cdot (b - a)$

- b) Sei $\xi \in [a, b]$. Betrachte $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq \xi) \\ 1 & (x = \xi) \end{cases}$



Dann ist $U_f(Z) = 0$

$$0 < O_f(Z) \leq 2\|Z\|$$

Falls $\|Z\| \rightarrow 0$, ist $O_f(Z) \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = 0$$

- c) Dirichletsche Sprungfunktion

$$\text{Sei } f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} U_f(Z) = 0 \\ O_f(Z) = 1 \end{array} \right\} \text{ für alle } Z \in Z[a, b]$$

$\Rightarrow f(x)$ ist nicht Riemann-integrierbar.

Eigenschaften des Riemann-Integrals

Definition 1.6

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion, so bezeichnen wir mit $\int_a^b f(x) dx$ die **Fläche** zwischen der Kurve $f(x)$ und der x -Achse im Intervall $[a, b]$.

Bemerkung 1.7

Ist $f(x)$ negativ, so kann man die Fläche durch $\int_a^b |f(x)| dx$ definieren

Ist $b < a$, definiert man $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

Lemma 1.8 (Monotonie)

Sind f, g integrierbar mit $f(x) \leq g(x)$ auf $[a, b]$, so gilt $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Beweis:

Zu einer vorgegebenen Zerlegung Z gilt eine derartige Ungleichung für die Ober- und Untersumme.

Sie überträgt sich auch im Grenzfall.

q.e.d.

Korollar 1.9

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Beweis:

Mit Lemma 1.8 folgt aus $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ die Beziehung

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

und somit die Behauptung.

q.e.d.

Korollar 1.10 (Nichtnegativität)

Integration erhält die Nichtnegativität

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Beweis:

Mit Monotonielemma 1.8 folgt $f(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b 0 \cdot dx = 0 \quad \checkmark \quad \text{q.e.d.}$$

Satz 1.11 (Linearität)

Seien $f(x), g(x)$ integrierbar auf $[a, b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ integrierbar auf $[a, b]$ und es gilt:

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Beweis:

Aufgrund der Ungleichungen

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$$

$$\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$$

auf $[a, b]$ gilt:

$$\int_a^b (f + g) dx \leq \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

$$\int_a^b (f + g) dx \geq \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

Daraus folgt die Additivität.

Die Beziehung $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$ ist klar für $\lambda \geq 0$, da die entsprechende Aussage für das Ober- und Unterintegral gilt.

Für $\lambda < 0$ verwendet man $\int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx$, d.h. die Rolle von Ober- und Unterintegral vertauscht sich. q.e.d.

Lemma 1.12 (Zusammensetzung von Integrationsintervallen)

Sei $a \leq c \leq b$. Dann ist $f(x)$ genau dann über $[a, b]$ integrierbar, wenn f über $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar ist. Es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Beweis:

Betrachte: Verfeinerte Zerlegung, in der c als Knoten auftritt. Dann folgt die Behauptung direkt aus der Betrachtung der Ober- und Untersummen. q.e.d.

Wann ist eine Funktion integrierbar?

Lemma 1.13 (Riemannsches Kriterium)

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) f ist integrierbar über $[a, b]$.
- ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}[a, b]$, so dass gilt: $O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$.

Beweis:

i) $\rightarrow$ ii):

Nach der Definition von Ober- und Unterintegral existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Zerlegungen

$$Z_1, Z_2 \text{ mit } 0 \leq O_f(Z_1) - \int_a^b f(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leq \int_a^b f(x)dx - U_f(Z_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Da diese Ungleichungen beim Übergang zu einer Verfeinerung erhalten bleiben, können wir o.B.d.A. $Z_1 = Z_2 = Z$ wählen.

Addition beider Ungleichungen liefert ii)

ii) $\rightarrow$ i):

$$\text{Für } \varepsilon > 0 \text{ folgt aus ii), dass } 0 \leq \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \leq O_f(Z) - U_f(Z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ii)}}}{<} \varepsilon$$

Somit sind Ober- und Unterintegral identisch, d.h. f ist integrierbar. q.e.d.

Wofür kann man dieses Kriterium anwenden?

Satz 1.14 (Integrierbarkeit monotoner Funktionen)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Ist f monoton, so ist f integrierbar.

Beweis:

Sei o.B.d.A. f monoton wachsend. Betrachte äquidistante Zerlegung Z mit $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, $i = 0, \dots, n$.

$$\text{Dann gilt: } O_f(Z) - U_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$\begin{aligned} &= \underset{(\text{äquidistant})}{\frac{b-a}{n}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Damit ist f nach dem Riemann-Kriterium integrierbar.

q.e.d.

Gibt es noch eine weitere Anwendung?

Satz 1.15 (Integrierbarkeit stetiger Funktionen)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Falls f stetig ist, so ist f auch integrierbar.

Beweis:

Da f auf kompaktem $[a, b]$ stetig ist, ist f dort gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon, \delta > 0$ so gewählt,

$$\text{dass } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Für eine Zerlegung Z mit $\|Z\| < \delta$ folgt dann

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\sup f([x_i, x_{i+1}]) - \inf f([x_i, x_{i+1}])) \cdot (x_{i+1} - x_i) \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist f nach dem Riemann-Kriterium integrierbar.

q.e.d.

Welche Konsequenzen hat das?

Beispiele 1.16

Folgende Funktionen sind auf $[a, b]$ integrierbar:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \ln(x)$, falls $a > 0$

d) $f(x) = \sin x$

e) Polynomfunktionen: $f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$

Bemerkung: Auch stückweise stetige Funktionen mit endlich vielen Sprungstellen sind integrierbar.

Beweisidee: Verwende Zerlegungslemma 1.12 und führe vollständige Induktion nach der Zahl der Sprungstellen durch. q.e.d.

Welche Eigenschaften lassen sich für Integrale mit stetigen Funktionen noch zeigen?

Satz 1.17 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und nichtnegativ („Gewichtsfunktion“).

Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx$.

Bemerkung: $f(\xi)$ kann als Mittelwert von f im Intervall $[a, b]$ bzgl. einer Gewichtsfunktion g aufgefasst werden.
Da f stetig ist, wird dieser Mittelwert als Funktionswert angenommen.

Beweis:

Seien $m = \min f([a, b])$ und $M = \max f([a, b])$.

Da g nichtnegativ ist, gilt: $m \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ und damit nach dem Monotonie-Lemma 1.8

$$m \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Somit existiert eine Zahl μ („Mittelwert“) mit

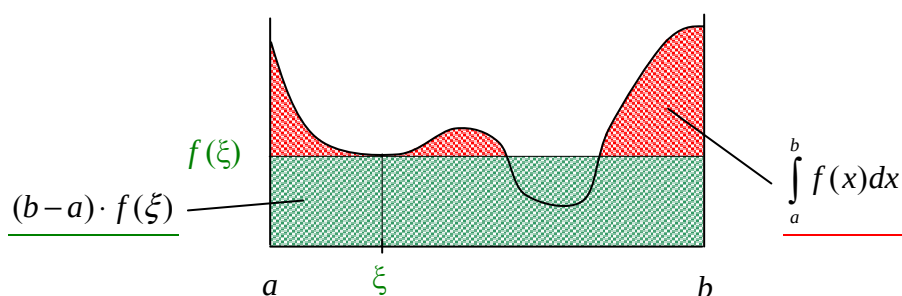
$$\mu \cdot \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert dann ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu$. q.e.d.

Korollar 1.18

Mit $g(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$ folgt aus Satz 1.17:

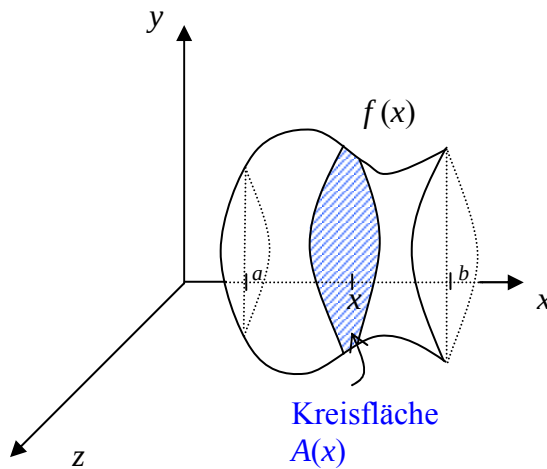
Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$



Beide Flächen sind identisch.

Eine Anwendung des bestimmten Integrals

Volumen von Rotationskörpern 1.19



$$A(x) \text{ hat Radius } f(x) \quad \Rightarrow \quad A(x) = \pi(f(x))^2$$

Cavalieri: Volumen des Rotationskörpers ergibt sich durch Aufsummieren der Flächeninhalte $A(x)$ im x -Intervall $[a, b]$.

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

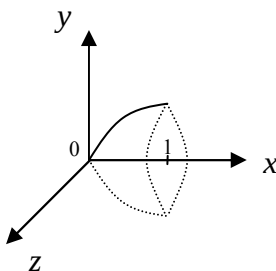
Beispiele 1.20

a) $f(x) = r = \text{const}$ ergibt das Volumen eines Kreiszylinders mit Radius r und Höhe $b - a$:

$$V = \pi \cdot \int_a^b r^2 dx = \pi \cdot r^2 \int_a^b 1 dx = \pi \cdot r^2 (b - a)$$



b) $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, 1]$



$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \frac{\pi}{2}$$