

§9 Basistransformation

Sei K ein Körper, sei V ein n -dimensionaler K -VR.

Seien $V = (v_1, \dots, v_n)$ und $V' = (v'_1, \dots, v'_n)$ Basen von V .

Betrachte $id_V : V \rightarrow V$

$$\text{Sei } v_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} \cdot v'_i$$

$$v'_i = \sum_{k=1}^n s'_{ki} \cdot v_k$$

(9.1) Lemma

(1) Es gilt $(s_{ij}) = M_V^{V'}(id_V)$ und $(s'_{ki}) = M_V^V(id_V)$

(2) $(s'_{ki}) \cdot (s_{ij}) = E_n$

(3) $M_V^{V'}(id_V) = M_V^V(id_V)^{-1}$

Beweis:

Nach Definition von $M_V^{V'}(id_V)$ hat man $id_V(v_j) = v_j$ als Linearkombination der Basisvektoren $(v'_1, \dots, v'_n)$ zu schreiben.

Daher gilt $M_V^{V'}(id_V) = (s_{ij})$. Ebenso $M_V^V(id_V) = (s'_{ki})$

zu (2):

$$\begin{aligned} (s'_{ki}) \cdot (s_{ij}) &= M_V^V(id_V) \cdot M_V^{V'}(id_V) \\ &= M_V^V(id_V \circ id_V) = M_V^V(id_V) \\ &= E_n \end{aligned}$$

siehe (8.10)

(3) folgt aus (1) und (2)

q.e.d.

Sei nun W ein m -dimensionaler K -VR. Seien $W = (w_1, \dots, w_m)$ und $W' = (w'_1, \dots, w'_m)$ Basen von W , sei $V \xrightarrow{f} W$ ein Homomorphismus.

Problem: Wie hängen $M_V^W(f)$ und $M_V^{W'}(f)$ zusammen?

(9.2) Satz

$$(1) M_{V'}^{W'}(f) = M_W^{W'}(id_W) \cdot M_V^W(f) \cdot M_V^V(id_V)$$

$$(2) \text{ Sei } v_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i' \text{ und } w_l = \sum_{k=1}^m t_{kl} w_k' \\ 1 \leq j \leq n \quad 1 \leq l \leq m$$

$$\text{Sei } S = (s_{ij}), \quad T = (t_{kl}).$$

$$\text{Dann gilt } M_{V'}^{W'}(f) = T \cdot M_V^W(f) \cdot S^{-1}$$

Beweis:

Nach (8.6) ist die rechte Seite der Gleichung (1) genau die Matrix

$$M_{V'}^{W'}(id_W \circ f \circ id_V) = M_{V'}^{W'}(f)$$

(2) folgt aus (1) und Lemma (9.1)

(9.3) Korollar

Sei $V \xrightarrow{f} V$ ein Endomorphismus

$$\text{Dann gilt } M_{V'}^V(f) = S \cdot M_V^V(f) \cdot S^{-1}$$

Beweis:

Setze in (9.2) $V = W, V' = W, V' = W$

Dann gilt $S = T$.

(9.4) Definition

Die Matrix $M_V^{V'}(id_V) = (s_{ij})$ heißt die **Übergangsmatrix** von der Basis V zur Basis V' .

Sei nun $V \xrightarrow{f} W$ ein Homomorphismus

Problem: Man finde Basen V' von V und W' von W derart, dass $M_{V'}^{W'}(f)$ besonders einfach ist.

Sei $V = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, W' beliebige Basis von W

$$v_1, \dots, v_n \mapsto f(v_1), \dots, f(v_n)$$

(1) Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V derart, dass $v_1, \dots, v_r$ eine Basis von $\text{Ker}(f)$ bilden.

$$\text{Dann hat } M_{V'}^{W'}(f) \text{ die Form } \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{r\text{-mal}} \begin{pmatrix} & & \\ & & * \\ & & \end{pmatrix}$$

(2) Betrachte nun

$$f(v_1) = \dots = f(v_r) = 0 \quad f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$$

Behauptung: $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ sind l.u. in W .**Beweis:**

$$\text{Sei } \sum_{i=r+1}^n a_i f(v_i) = 0$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=r+1}^n a_i v_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=r+1}^n a_i v_i \in \text{Ker}(f)$$

$$\text{Da } v_1, \dots, v_r \text{ Basis ist von } \text{Ker}(f) \text{ existieren } a_1, \dots, a_r \in K \text{ mit } \sum_{i=r+1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^r a_i v_i$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \sum_{i=1}^r a_i v_i - \sum_{i=r+1}^n a_i v_i$$

$$\text{Da } v_1, \dots, v_n \text{ Basis ist, folgt } a_1 = \dots = a_n = 0$$

$$\Rightarrow \text{Behauptung} \quad \text{q.e.d.}$$

(3) Sei $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ wie oben $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$ ist Teil einer Basis von W Sei W eine Basis von W der Form $w_1 = f(v_{r+1}), \dots, w_{n-r} = f(v_n), w_{n-r+1}, \dots, w_m$

$$\text{Dann gilt } M_V^W(f) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_r \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n-r} \right)$$

Sei $V' = (v_{r+1}, \dots, v_n, v_1, \dots, v_r)$

$$\text{Dann gilt } M_{V'}^W(f) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{n-r} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_r \right) \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}} \right\} m$$

Damit ist bewiesen:

(9.5) Satz

Sei $V \xrightarrow{f} W$ ein Homomorphismus. Dann existieren Basen V von V und W von W derart, dass

$$M_V^W(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei } r+s=n$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_s \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_r$

Das Bild von f hat die Basis $w_1, \dots, w_s$. Insbesondere gilt $\text{Rang}(f) = s$.

(9.6) Korollar

Sei $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$

Dann existieren Matrizen $S \in \text{Gl}_n(K)$ und $T \in \text{Gl}_m(K)$ derart, dass $B := T \cdot A \cdot S^{-1}$ die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ hat.}$$

Beweis:

Sei $K^n \xrightarrow{f} K^m$ der Homomorphismus mit $M_{E^{(n)}}^{E^{(m)}}(f) = A$, wobei $E^{(n)}$ und $E^{(m)}$ die Standardbasis von K^n und K^m sei.

Es gibt Basen V von K^n und W von K^m derart, dass

$$M_V^W(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $S = M_{E^{(n)}}^V(\text{id}_{K^n})$, $T = M_{E^{(m)}}^W(\text{id}_{K^m})$

Dann gilt $T \cdot A \cdot S^{-1} = M_{E^{(m)}}^W(\text{id}_{K^m}) \cdot M_{E^{(n)}}^{E^{(m)}}(f) \cdot M_V^{E^{(n)}}(\text{id}_{K^n})$

$$= M_V^W(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(9.7) Definition

Sei $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ mit Spalten $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, wobei $\alpha_i \in K^m$

Der Übergang zur Matrix $A' = (\alpha_1, \dots, \alpha_j + t\alpha_i, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$ heißt **elementare**

Spaltenoperation, hierbei ist $i \neq j$, $t \in K$

(d.h. man addiert zur j -ten Spalte ein Vielfaches der i -ten Spalten)

(9.8) Beispiele

$$\begin{aligned}
 (1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{ij=13, t=-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{ij=12, t=-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{ij=21, t=2/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\rightsquigarrow (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \rightsquigarrow (-\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\
 &\rightsquigarrow (-\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n)
 \end{aligned}$$

Sei $1 \leq i, j \leq n$ und $i \neq j$

Für $t \in K$ sei

$$E_{ij}(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{0} & & \\ & & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow j \\ \leftarrow i \end{matrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$$

Eine solche Matrix heißt **Elementarmatrix**. $E_{ij}(t)$ ist invertierbar und $E_{ij}(t)^{-1} = E_{ij}(-t)$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
 AE_{ij}(t) &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot E_{ij}(t) \\
 &= (\alpha_1, \dots, \alpha_j + t\alpha_i, \dots, \alpha_n)
 \end{aligned}$$

Also gilt:

Die Ausführung einer elementaren Spaltenoperation in A bedeutet Multiplikation von A mit einer Elementarmatrix von rechts.

Im Beispiel (2) gilt also

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot E_{12}(1) \cdot E_{21}(-1) \cdot E_{12}(1) = (-\alpha_2, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Analog betrachtet man **elementare Zeilenoperationen**

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i + t \cdot \beta_j \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

Die Ausführung einer elementaren Zeilenoperation bedeutet Multiplikation mit einer Elementarmatrix von links.

(9.9) Schema zur Berechnung der inversen Matrix

Sei $A \in GL_n(K)$ invertierbar.

Betrachte

$$(A, E_n) \in Mat_{n \times 2n}(K).$$

Durch Ausführung von elementaren Zeilenoperationen kann A auf Diagonalgestalt gebracht werden, d.h. es gilt

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei B das Produkt der zugehörigen Elementarmatrizen ist.

Wende nun dieselben Zeilenoperationen auf (A, E_n) an. Es entsteht dann die Matrix

$$B \cdot (A, E_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n & B \end{pmatrix}$$

Es gilt daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot B$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(9.10) Definition

Sei $A \in M_{m \times n}(K)$.

Die Dimension des Unterraumes von K^m der von den Spalten von A erzeugt wird heißt der (Spalten-) **Rang** von A .

Offenbar gilt:

Ist A die Matrix des Homomorphismus $V \xrightarrow{f} W$ bezüglich der Basen V, W , so gilt $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(f)$, s.(7.9)

Ebenso sei der **Zeilenrang** von A die Dimension des Unterraumes von K^n , der von den Zeilen von A erzeugt wird.

(9.11) Satz

Für jede Matrix A gilt $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A)$

Beweis:

Sei $V \xrightarrow{f} W$ ein Homomorphismus.

Gilt dann $M_V^W(f) = A$ und $M_{V'}^{W'}(f) = B$, so ist $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(B)$
 $= \dim \text{Bild}(f)$

Also gilt: Ist $S \in GL_n(K)$ und $T \in GL_m(K)$, so ist
 $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(T \cdot A \cdot S^{-1})$
 (fasse T, S als Übergangsmatrizen auf)

Es gibt nun invertierbare Matrizen S, T derart, dass

$$T A S^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \mathbf{0} & & 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \mathbf{0} & & 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} m \\ s \end{array}$$

Also gilt Spaltenrang $(A) = s$

Übergang zur transponierten Matrix

$$(S^{-1})^t A^t T^t = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \mathbf{0} & & 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \mathbf{0} & & 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} n \\ s \end{array}$$

Mit demselben Schluss gilt:

Spaltenrang $A^t = s$

Spaltenrang $A^t = \text{Zeilenrang } A$

$\Rightarrow$ Behauptung

q.e.d.