

§8 Matrizen

Sei K ein Körper

(8.1) Definition

Eine $m \times n$ -Matrix mit Einträgen in K ist ein Schema

$$(a_{ij}) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wobei $a_{ij} \in K$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \in K^m \text{ heißt die } k\text{-te } \underline{\text{Spalte}} \\ (a_{1l}, \dots, a_{nl}) \text{ heißt die } l\text{-te } \underline{\text{Zeile}} \end{array} \right\} \text{ von } (a_{ij})$$

Eine $m \times n$ -Matrix besteht aus n Spalten und m Zeilen.

Seien $(a_{ij}), (b_{ij})$ $m \times n$ -Matrizen

$$\begin{array}{lcl} (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) & , & c \cdot (a_{ij}) = (c \cdot a_{ij}) \\ \text{Summe} & & \text{Skalares Vielfaches} \end{array}$$

$\Rightarrow$ die Menge der $m \times n$ -Matrizen sind ein VR der Dimension $m \cdot n$

Die Matrizen

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} j\text{-te Spalte} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 \cdots \cdots 0 \\ 0 \cdots 1 \cdots 0 \\ 0 \cdots \cdots 0 \\ 0 \cdots \cdots 0 \end{pmatrix} \end{array} \\ i\text{-te Zeile} \end{array} \quad \text{bilden eine Basis}$$

$\text{Mat}_{m \times n}(K) = \text{alle } m \times n\text{-Matrizen}$

(8.2) Definition

Sei $(a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$

Sei $b_{ji} := a_{ij}$. Dann heißt $(b_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}}$ die **transponierte Matrix** von (a_{ij})

Bezeichnung: $(b_{ji}) = (a_{ij})^t$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix eines Homomorphismus

V, W seien VR mit Basen

$$V = (v_1, \dots, v_n), W = (w_1, \dots, w_m)$$

Sei $V \xrightarrow{f} W$ ein Homomorphismus

f ist eindeutig bestimmt durch $f(v_1), \dots, f(v_n)$, $\exists$ eindeutig Elemente $a_{ij} \in K$:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Bilde die Matrix $(a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$

(8.3) Definition

Die Matrix (a_{ij}) heißt die Matrix von f bezüglich der Basen V (von V) und W (von W)

$$(a_{ij}) = M_V^W(f)$$

(8.4) Beispiele

(1) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a+b \\ b-c \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei } E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_E^F(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1 + w_2$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = w_2$$

$$M_V^W(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Seien V, W, U VR/ K mit Basen

$$V = (v_1, \dots, v_n), W = (w_1, \dots, w_m), U = (u_1, \dots, u_l)$$

Seien $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$ Homomorphismen

Problem Was ist $M_V^U(g \circ f)$?

Es sei $(a_{ij}) = M_V^W(f)$

und sei $(b_{ki}) = M_W^U(g)$

$$\Rightarrow f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i, \quad g(w_i) = \sum_{k=1}^l b_{ki} u_k$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(v_j) = g(f(v_j)) = g\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} w_i\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot g(w_i) \\
&= \sum_{i=1}^m \left(a_{ij} \left(\sum_{k=1}^l b_{ki} u_k \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l (a_{ij} b_{ki}) \cdot u_k \\
&= \sum_{k=1}^l \left(\sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij} \right) \cdot u_k
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Sei } c_{kj} := \sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij}$$

$$\text{Dann gilt } (c_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq l \\ 1 \leq j \leq n}} = M_V^U(g \circ f)$$

(8.5) Definition Matrixmultiplikation

$$\text{Sei } A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$$

$$B = (b_{ki}) \in \text{Mat}_{l \times m}(K)$$

$$\text{Dann heißt } B \cdot A := \left(\sum_{i=1}^m b_{ki} \cdot a_{ij} \right)_{\substack{1 \leq k \leq l \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ das } \underline{\text{Produkt}} \text{ aus } A \cdot B$$

(8.5.1) Beispiele

$$(1) \quad (b_{ki}) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (a_{ij}) := \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 & (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 2 & 21 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad g = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ nicht definiert}$$

Die Definition der Matrixmultiplikation ist so gemacht, dass gilt:

(8.6) Satz

Seien $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$ Homomorphismen, seien V, W, U Basen von V, W, U
Dann gilt

$$M_V^U(g \circ f) = M_W^U(g) \cdot M_V^W(f)$$

(8.7) Satz

Seien $f_1, f_2 \in \text{Hom}_K(V, W)$

Seien V, W Basen von V, W

Dann gilt

$$M_V^W(f_1 + f_2) = M_V^W(f_1) + M_V^W(f_2)$$

$$M_V^W(c \cdot f_1) = c \cdot M_V^W(f_1) \quad \text{wobei } c \in K$$

Beweis:

$$\text{Sei } (a_{ij}) = M_V^W(f_1)$$

$$(b_{ij}) = M_V^W(f_2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f_1 + f_2)(v_j) &= f_1(v_j) + f_2(v_j) \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^m b_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) w_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_V^W(f_1 + f_2) &= (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= M_V^W(f_1) + M_V^W(f_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 1.Behauptung (2.Behauptung analog)

q.e.d.

(8.8) Rechenregeln für Matrizen

Seien $A, A_1, A_2 \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$

$B, B_1, B_2 \in \text{Mat}_{l \times m}(K)$

$C \in \text{Mat}_{r \times l}(K)$

Dann gelten:

(a) $C \cdot (B \cdot A) = (C \cdot B) \cdot A$

(b) $(B_1 + B_2) \cdot A = B_1 \cdot A + B_2 \cdot A$

(c) $B \cdot (A_1 + A_2) = B \cdot A_1 + B \cdot A_2$

(d) $(B \cdot A)^t = A^t \cdot B^t$

Beweis:

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ki}) \quad C = (c_{sk})$$

$$\begin{aligned} \text{(a) } C \cdot (B \cdot A) &= \left(\sum_{k=1}^l c_{sk} \cdot \left(\sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij} \right) \right)_{\substack{1 \leq s \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^m c_{sk} b_{ki} a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\left(\sum_{k=1}^l c_{sk} b_{ki} \right) a_{ij} \right) = (C \cdot B) \cdot A \end{aligned}$$

(b), (c), (d) ähnlich

q.e.d.

(8.9) Satz

Sei $V \xrightarrow{f} W$ ein Homomorphismus mit Matrix $A = M_V^W(f) = (a_{ij})$

Sei $v \in V$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bezüglich $V = (v_1, \dots, v_n)$.

Dann sind

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ die Koordinaten von } f(v) \text{ bezüglich } W.$$

Beweis:

$$\text{Es ist } v = \sum_{j=1}^n x_j \cdot v_j$$

$$\Rightarrow f(v) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot f(v_j) = \sum_{j=1}^n \left(x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot w_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) w_i$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_{1 \leq i \leq m} \text{ sind die Koordinaten von } f(v). \quad \text{Dies ist genau } A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sei $V = K^n$, $W = K^m$ mit Standardbasen

Ist $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, so sind $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ seine Koordinaten

Sei $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$

Der Homomorphismus $K^n \xrightarrow{f} K^m$ der bezüglich der Standardbasis die Matrix A hat, heißt die **Standardabbildung** zur Matrix A .

$$K^n \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^m$$

$$\text{Sei } E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$$

Sei $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$

$$\Rightarrow A \cdot E_n = A$$

$$\Rightarrow E_n \cdot A = A$$

E_n heißt Einheitsmatrix vom Format $n \times n$

Sei V ein n -dimensionaler VR über K , sei $(v_1, \dots, v_n) = V$ eine Basis von V .

Dann ist $M_V^V(id_V) = E_n$, da $id_V(v_j) = v_j$

(8.10) Endomorphismen

$$V \xrightarrow{f} V$$

Sei V ein VR/ K . $\text{End}_K(V) = \text{Hom}_K(V, V)$

Die Komposition $\circ$ ist eine Verknüpfung auf $\text{End}_K(V)$

Es gelten:

(a) $\circ$ ist assoziativ

$$(b) \text{ } id_V \circ f = f \circ id_V = f \quad \forall f, id_V \in \text{End}_K(V)$$

$$(c) \begin{aligned} (g + h) \circ f &= g \circ f + h \circ f \\ h \circ (g + f) &= h \circ g + h \circ f \end{aligned}$$

Aber: $g \circ f \neq f \circ g$!!!

Also: $(\text{End}_K(V), +, \circ)$ erfüllen die Axiome (1.1) I-III, außer dem Kommutativgesetz II (b).

Man sagt $\text{End}_K(V)$ bilden einen (nicht kommutativen) **Ring**.

Zusätzlich hat man die Skalar-Multiplikation $f \mapsto c \cdot f$.

$$\text{Es gilt } (g \circ c \cdot f) = c \cdot (g \circ f)$$

$$(c \cdot g) \circ f = c \cdot (g \circ f)$$

Man sagt $\text{End}_K(V)$ ist eine **K-Algebra**.

(8.11) Quadratische Matrizen

Sei $\dim V = n$, sei $f \in \text{End}_K(V)$, $V \xrightarrow{f} V$

Im Hinblick auf Komposition ist es zweckmäßig im Bildbereich von $f (= V)$ und im Definitionsbereich von $f (= V)$ **dieselbe** Basis zu betrachten.

$$\text{Dann gilt } M_V^V(g \circ f) = M_V^V(g) \cdot M_V^V(f)$$

(8.12) Definition

Eine $n \times n$ -Matrix A heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix B gibt, mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$.

Sei V ein K -VR mit Basis $V = (v_1, \dots, v_n)$

(8.13) Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) A ist invertierbar
- (2) Ist f der Endomorphismus von V mit $M_V^W(f) = A$, so ist f ein Automorphismus
- (3) Die Spalten von A sind l.u.
- (4) Es existiert eine Matrix B mit $A \cdot B = E_n$
- (4') Es existiert eine Matrix B mit $B \cdot A = E_n$

Beweis:

(1) $\Leftrightarrow$ (2): Sei $A \cdot B = B \cdot A = E_n$

Sei g der Endomorphismus mit $M_V^V(g) = B$

$\Rightarrow f \circ g = g \circ f = id_V$, da $M_V^V(id_V) = E_n$

Umgekehrt: Sei $B := M_V^V(f^{-1})$. Dann gilt $A \cdot B = B \cdot A = E_n$

(1) $\Rightarrow$ (3): Sei $A \cdot B = B \cdot A = E_n$

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Spalten von A

Dann gilt $\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow B \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n$ l.u.

(3) $\Rightarrow$ (2): Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ l.u.

$\Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ist eine Basis von K^n

$\Rightarrow \exists$ Endomorphismus g von K^n mit $g(\alpha_j) = e_j$

Sei f die Standardabbildung mit Matrix $A \Rightarrow f(e_j) = \alpha_j$

$g \circ f(e_j) = e_j \Rightarrow g \circ f = id_{K^n}$

Umgekehrt $f \circ g(\alpha_j) = \alpha_j \Rightarrow f \circ g = id_V$

$\Rightarrow g = f^{-1}$

(1) $\Rightarrow$ (4), (4'): da Abschwächung

(4) $\Rightarrow$ (2): Sei $A \cdot B = E_n$. Sei $g \in \text{End}_K(V)$ mit $M_V^V(g) = B$

$\Rightarrow f \circ g = id_V \Rightarrow f$ ist surjektiv

$\Rightarrow f$ ist bijektiv (vgl. Übung 8)

(4') $\Rightarrow$ (2): analog

q.e.d.

Die Matrix B mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$ wird mit A^{-1} bezeichnet.

(8.14) Satz

Seien A, B invertierbare $n \times n$ -Matrizen

Dann ist $A \cdot B$ invertierbar und es gilt $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Beweis: $A \cdot B = B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot E_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E_n$ q.e.d.

Die Summe von invertierbaren Matrizen ist nicht invertierbar.

A invertierbar $\Rightarrow -A$ invertierbar

$A + (-A) = (0)$ nicht invertierbar

(8.15) Beispiele

(1) Eine Matrix der Form $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt **Diagonalmatrix**.

A invertierbar $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$

Dann gilt $A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$

Sei $M = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ mit Spalten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$\Rightarrow M \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 \cdot \alpha_1, \lambda_2 \cdot \alpha_2, \dots, \lambda_n \cdot \alpha_n)$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & a & b \\ 2 & 1 & c & d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a+3c &= 1 & b+3d &= 0 \\ 2a+c &= 0 & 2b+d &= 1 \end{aligned}$$

(3) Eine $n \times n$ -Matrix heißt **nilpotent**, wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$N^r = \underbrace{N \cdot \dots \cdot N}_{r\text{-mal}} = (0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N \text{ ist nicht invertierbar}$$

Sei $A = E_n - N$. Dann ist A invertierbar.

$$(E_n - N)(E_n + N + N^2 + \dots + N^{r-1}) = E_n - \underbrace{N^r}_{(0)} = E_n$$

$$\Rightarrow (E_n - N)^{-1} = (E_n + \dots + N^{r-1}) \quad \text{vgl. geometrische Reihe (Analysis)}$$

(4) Eine Matrix der Form $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ heißt **obere Dreiecksmatrix**.

A ist invertierbar $\Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$

Offenbar sind die Spalten von A l.u. falls $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_{i-1} & * \\ & & 0 & \\ & & & \lambda_{i+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \dots \lambda_{i-1} \neq 0$$

$\Rightarrow i$ -te Spalte ist Linearkombination der ersten $i-1$ Spalten

$\Rightarrow$ die Spalten sind l.a.

$\Rightarrow A$ ist nicht invertierbar

(8.16) Satz

- (a) Die Menge der Automorphismen von V ($\dim V = n$) sind eine Gruppe.
 (b) Die invertierbaren Matrizen sind eine Gruppe bzgl. $\bullet$

Beweis:

(a) folgt aus (7.2)

(b) folgt aus (8.12) q.e.d.

(8.17) Bemerkung

Die Abbildung $\text{Aut}(V) \rightarrow GL_n(K)$
 $f \mapsto M_V^V(f)$ ist ein Isomorphismus von Gruppen.

Die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen wird mit $GL_n(K)$ bezeichnet.

Sie heißt die lineare Gruppe.