

§7 Homomorphismen

Sei K ein Körper, seien V, W Vektorräume über K

(7.1) Definition

Ein **Homomorphismus** von V nach W ist eine Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ derart, dass gilt

$$(a) \quad f(v + w) = f(v) + f(w) \quad \forall v, w \in V, c \in K$$

$$(b) \quad f(c \cdot v) = c \cdot f(v)$$

Bemerkung:

(a) besagt, dass f ein Homomorphismus von $(V, +)$ in $(W, +)$ ist. (siehe §2)

(7.2) Satz

Seien V, W, U Vektorräume über K , seien $V \xrightarrow{f} W$, $W \xrightarrow{g} U$ Homomorphismen. Dann ist $g \circ f$ ein Homomorphismus von V nach U .

Sei f ein **Isomorphismus** (d.h. bijektiver Homomorphismus), dann ist f^{-1} ein Isomorphismus.

Beweis:

Seien $v, w \in V$, dann gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(v + w) &= g(f(v + w)) \\ &= g(f(v) + f(w)) \\ &= g(f(v)) + g(f(w)) \\ &= (g \circ f)(v) + (g \circ f)(w) \end{aligned}$$

Analog: $(g \circ f)(c \cdot v) = c \cdot (g \circ f)(v) \Rightarrow g \circ f$ ist Homomorphismus

Sei f Isomorphismus, f^{-1} bijektiv

Seien $x, y \in W$

$$\text{zu zeigen: } f^{-1}(x + y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(c \cdot x) = c \cdot f^{-1}(x)$$

$$\text{genügt zu zeigen: } f(f^{-1}(x + y)) = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y))$$

$$f(f^{-1}(c \cdot x)) = f(c \cdot f^{-1}(x))$$

Es gilt

$$f(f^{-1}(x + y)) = x + y \text{ und}$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) &= f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)), \text{ da } f \text{ Homomorphismus} \\ &= x + y \end{aligned}$$

Analog $f(f^{-1}(c \cdot x)) = cx$
 $f(c \cdot f^{-1}(x)) = c \cdot f(f^{-1}(x)) = cx$ q.e.d.

(7.3) Satz

Sei $f, g: V \rightarrow W$

Dann ist $f + g$ und $a \cdot f$, $a \in K$ ein Homomorphismus

$$((f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad , \quad (a \cdot f)(v) = a \cdot f(v))$$

Sei $\text{Hom}_K(V, W)$ die Menge der Homomorphismen von V nach W mit der Addition, Skalarmultiplikation ist $\text{Hom}_K(V, W)$ ein Vektorraum über K .

Beweis:

Sei $v, w \in V$

$$\begin{aligned} (f + g)(v + w) &= f(v + w) + g(v + w) \\ &= f(v) + f(w) + g(v) + g(w) \\ &= f(v) + g(v) + f(w) + g(w) \\ &= (f + g)(v) + (f + g)(w) \end{aligned}$$

Analog $(f + g)(c \cdot v) = c \cdot (f + g)(v)$
 $(a \cdot f)(v + w) = (a \cdot f)(v) + (a \cdot f)(w)$ zeigt man analog
 $(a \cdot f)(c \cdot v) = c \cdot (a \cdot f)(v)$

$\text{Hom}_K(V, W)$ ist ein Vektorraum

$$(f + g) + h = f + (g + h)$$

$$f + g = g + f$$

$$\exists 0: V \rightarrow W \quad \text{mit } f + 0 = f \text{ für alle } f$$

$$\exists -f: V \rightarrow W \quad \text{mit } f + (-f) = 0$$

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(v) &= (f + g)(v) + h(v) \\ &= (f(v) + g(v)) + h(v) \\ &= f(v) + (g(v) + h(v)) \\ &= (f + (g + h))(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0: V &\rightarrow W \\ v &\mapsto 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (f + 0)(v) &= f(v) + 0(v) \\ &= f(v) + 0 = f(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f: V &\rightarrow W \\ v &\mapsto f(-v) = -f(v) \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

(7.4) Beispiele

(1) Sei $V = K^n$, $W = K^m$

$$K^n \xrightarrow{p} K^m$$

$$n > m$$

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_m)$$

$\Rightarrow p$ ist Homomorphismus, p heißt „**Projektion**“

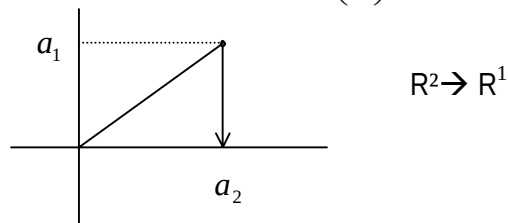
$$w = (b_1, \dots, b_m)$$

$$p(v + w) = p(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) = (a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m)$$

$$= p((a_1, \dots, a_m)) + p((b_1, \dots, b_m))$$

$$\text{Analog } p(c \cdot (a_1, \dots, a_m)) = c \cdot p(a_1, \dots, a_m) = (c \cdot a_1, \dots, c \cdot a_m)$$

Durch Auswahl von m Koordinaten $\binom{n}{m}$ verschiedene **Projektionen**



(2) $K^2 \xrightarrow{f} K$
 $(a, b) \mapsto (a + b)$

$$f = p_1 + p_2$$

$$p_1 : (a, b) \mapsto a$$

$$p_2 : (a, b) \mapsto b$$

(3) Sei $\dim V = n$, und sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V

$$\text{Sei } V \xrightarrow{f} K^n$$

$$v \mapsto (a_1, \dots, a_n)$$

wobei $(a_1, \dots, a_n)$ die Koordinaten von v bzgl. $v_1, \dots, v_n$ sind, d.h.

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

$\Rightarrow f$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen

(7.5) Satz

Seien V, W zwei n -dimensionale Vektorräume. Dann gibt es einen Isomorphismus $V \xrightarrow{h} W$.

Beweis:

Sei $v_1, \dots, v_n$ Basis von V

Sei $w_1, \dots, w_n$ Basis von W

$\exists$ Isomorphismen

$$V \xrightarrow{f} K^n \xleftarrow{g} W \quad \text{wobei } v = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^n b_i w_i$$

$$v \mapsto (a_1, \dots, a_n) \\ (b_1, \dots, b_n) \leftarrow w$$

$\Rightarrow h := g^{-1} \circ f$ ist Isomorphismus. Es gilt:

$$v_1 \mapsto (1, 0, \dots, 0) \xleftarrow{g} w_1, \text{ also } v_1 \mapsto w_1, v_2 \mapsto w_2, \text{ usw.}$$

(4) Sei $c \in K$

$$V \xrightarrow{\tau_c} V \quad \text{ist Homomorphismus, da } c \cdot (v + w) = cv + cw \text{ und } c(av) = a(cv) \\ v \mapsto c \cdot v$$

$$\text{Es ist } \tau_c = c \cdot id_V$$

Sei $V \xrightarrow{f} W$ ein Homomorphismus, seien $v_1, \dots, v_r \in V$ und $c_1, \dots, c_r \in K$. Dann gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^r c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^r c_i \cdot f(v_i). \text{ Es gibt nämlich} \\ f\left(\sum_{i=1}^r c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^r f(c_i v_i) \quad (\text{Induktion über } r) \\ = \sum_{i=1}^r c_i \cdot f(v_i)$$

Sei $V \xrightarrow{f} W$ Homomorphismus

(7.6) Definition

$\text{Ker}(f) := \{v \in V : f(v) = 0\}$ heißt der **Kern** von f .

(7.7) Satz

- (a) $\text{Ker}(f)$ bzw. $\text{Bild}(f)$ sind Untervektorräume von V bzw. W
- (b) äquivalent
 - (1) f ist injektiv
 - (2) $\text{Ker}(f) = \{0\}$

Beweis:

zu a)

$$\vec{0}_V \in \text{Ker}(f) \text{ da } f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

$$\begin{aligned} \text{Seien } v, w \in \text{Ker}(f) &\Rightarrow f(v+w) = f(v) + f(w) = \vec{0}_w + \vec{0}_w = \vec{0}_w \\ &\Rightarrow v+w \in \text{Ker}(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } c \in K \quad f(c \cdot v) &= c \cdot f(v) = c \cdot \vec{0}_w = \vec{0}_w \\ &\Rightarrow \text{Ker}(f) \text{ ist Untervektorraum} \\ \vec{0}_w &\in \text{Bild}(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } x = f(v), y = f(w) \in \text{Bild}(f), cx &= c \cdot f(v) = f(c \cdot v) \in \text{Bild}(f) \\ &\Rightarrow x+y = f(v) + f(w) \\ &= f(v+w) \in \text{Bild}(f) \quad \Rightarrow \text{Bild}(f) \text{ ist Untervektorraum} \end{aligned}$$

zu b)

f ist Homomorphismus von Gruppen

Aus (2.16) (a) folgt die Behauptung q.e.d.**(7.8) Dimensionsformel**

Sei $\dim V = n$, sei $V \xrightarrow{f} W$ ein Homomorphismus, dann gilt:
 $\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Bild}(f) = \dim V$

Beweis:Sei $v_1, \dots, v_k$ eine Basis von $\text{Ker}(f)$ Ergänze sie zu einer Basis $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ von V Sei $w_i = f(v_i)$ für $k+1 \leq i \leq n$ Behauptung: $w_{k+1}, \dots, w_n$ ist Basis von $\text{Bild}(f)$ Sei $x = f(v) \in \text{Bild}(f)$

$$\begin{aligned} \text{Sei } v = \sum_{i=1}^n a_i v_i &\Rightarrow f(v) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f(v_i) = \sum_{i=k+1}^n a_i f(v_i) \\ &= \sum_{i=k+1}^n a_i w_i \Rightarrow (w_i)_{k+1 \leq i \leq n} \text{ ist Erzeugendensystem von } \text{Bild}(f) \end{aligned}$$

$$\text{Sei } \sum_{i=k+1}^n a_i w_i = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=k+1}^n a_i v_i \in \text{Ker}(f)$$

$$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_k \in K : \sum_{i=k+1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^k a_i v_i, \text{ da } v_1, \dots, v_k \text{ Basis für } \text{Ker}(f)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k+1}^n a_i v_i - \sum_{i=1}^k a_i v_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a_1 = \dots = a_{k+1} = \dots = a_n = 0$$

$$\Rightarrow w_{k+1}, \dots, w_n \text{ l.u.} \quad \Rightarrow \text{Ker}(f) = k$$

$$\text{Bild}(f) = n - k$$

$$k + (n - k) = n = \dim V$$

$$\Rightarrow \text{Behauptung}$$

q.e.d.

(7.9) Definition

$\dim(\text{Bild}(f))$ heißt auch der **Rang** von f .

(7.9.1) Korollar

Sei $f : K^n \rightarrow K^m$ ein Homomorphismus

$$\Rightarrow \dim(\text{Bild}(f)) \leq \dim K^n = n$$

Ist $m > n$, so ist f nicht surjektiv

Ist $m < n$, so ist f nicht injektiv

(da $\dim(\text{Bild}(f)) \leq \dim K^m = m$. Wäre f injektiv

$$\Rightarrow \text{Ker}(f) = (0) \Rightarrow \dim \text{Bild}(f) = n > m \quad \text{✗})$$

(7.10) Satz

Sei $\dim V = n$, sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V , sei W ein VR, seien $w_1, \dots, w_n$ beliebige Vektoren in W .

Dann existiert genau ein Homomorphismus $V \xrightarrow{f} W$ mit $f(v_j) = w_j$, $1 \leq j \leq n$

Beweis:

• **Existenz**

Sei $v \in V$ $\exists a_1, \dots, a_n \in K :$

$$v = \sum_{j=1}^n a_j v_j \text{ und die } a_j \text{ sind eindeutig bestimmt}$$

Setze

$$f(v) := \sum_{j=1}^n a_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n a_j w_j$$

Hierdurch ist eine Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ wohldefiniert.

Behauptung: f ist ein Homomorphismus

Seien $v, w \in V$, sei $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$, $w = \sum_{j=1}^n b_j v_j$

$$\Rightarrow v + w = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) v_j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(v+w) &= \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) w_j = \sum_{j=1}^n a_j w_j + \sum_{j=1}^n b_j w_j \\ &= f(v) + f(w) \end{aligned}$$

Analog: $f(c \cdot v) = c \cdot f(v) \Rightarrow$ Existenz

- **Eindeutigkeit**

Sei $V \xrightarrow{g} W$ ein Homomorphismus mit $g(v_j) = w_j$

$\Rightarrow g - f$ ist Homomorphismus mit $(g - f)(v_j) = w_j - w_j = 0$

$\Rightarrow \text{Ker}(g - f) = V \Rightarrow g - f = 0 \Rightarrow f = g$ q.e.d.

(7.11) Beispiele

(1) $K^3 \rightarrow K^2 \quad K = \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c \\ a + b + c \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3a + 2b \\ 2a - b \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$

e_1, e_2, e_3 Standardbasis

Sei f der Homomorphismus

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Was ist $\text{Ker}(f)$? Diese Frage bedeutet:

Wann ist $f(v) = 0$?

$$\text{Sei } v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a + 2b = 0 \\ &\Rightarrow a + b + c = 0 \\ &\Rightarrow c \in K, b = c, a = -2c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(f) = \left\{ c \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim \text{Ker}(f) = 1, \quad \dim \text{Bild}(f) = 2$$

Bezeichnung:

Homomorphismus = lineare Abbildung