

§6 Lineare Abhängigkeit und Basen

Sei V ein VR (=Vektorraum) über dem Körper K

(6.1) Definition

V heißt **endlich erzeugt** (über K), wenn es eine endliche Familie $(v_i)_{1 \leq i \leq m}$ in V gibt, derart, dass $\langle (v_i)_{1 \leq i \leq m} \rangle = V$ gilt.

(6.2) Lemma

Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie in V

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) Aus $\sum_{i \in I} a_i v_i = \vec{0}$ folgt $a_i = 0 \quad \forall i$
- b) Aus $v = \sum_{i \in I} a_i v_i = \sum_{i \in I} b_i v_i$ folgt $a_i = b_i \quad \forall i$

Beweis:

- (a) $\Rightarrow$ (b)

$$\text{Sei } \sum_{i \in I} a_i v_i = \sum_{i \in I} b_i v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in I} (a_i - b_i) v_i = 0$$

$$\Rightarrow a_i = b_i \quad \forall i \in I$$

- (b) $\Rightarrow$ (a)

$$\sum_{i \in I} a_i v_i = \vec{0} = \sum_{i \in I} 0 \cdot v_i$$

$$\Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i$$

q.e.d.

(6.3) Definition

Die Familie $(v_i)_{i \in I}$ heißt **linear unabhängig** (l.u.), wenn sie die Bedingungen (6.2) erfüllt. Andernfalls heißt sie **linear abhängig** (l.a.)

(6.4) Beispiel

$$(1) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{Sei } a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} a+b+c=0 & a+b+c=0 \\ \Rightarrow 2a+c=0 & | -1.\text{Gl} \quad a-b=0 \quad | +3.\text{Gl.} \\ 3a+b=0 & 3a+b=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow 4a=0 \quad \Rightarrow a=0, \quad b=0, \quad c=0 \\ \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ sind l.u.} \end{array}$$

$$(2) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$v_2 - v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = v_3 - v_1$$

$$\Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ sind l.a.}$$

$$\text{Es gilt auch } v_2 - v_1 - (v_3 - v_2) = 2v_2 - v_1 - v_3 = 0$$

$$(3) \quad \vec{0} \text{ ist l.a.} \quad 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$\text{Ist } v \neq \vec{0}, \text{ so ist } (v) \text{ l.u.}$$

$$\text{Denn sei } a \cdot v = \vec{0} \text{ und } a \neq 0 \Rightarrow \vec{0} = a^{-1}(a \cdot v) = 1 \cdot v = v \neq \vec{0} \quad \text{✗}$$

$$(4) \quad \text{Sei } (v_i)_{i \in J} \text{ Teilfamilie von } (v_i)_{i \in I} \text{ d.h. } J \subseteq I$$

$$\text{Ist } (v_i)_{i \in I} \text{ l.u., so ist } (v_i)_{i \in J} \text{ l.u.}$$

(6.5) Definition

Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ heißt eine **Basis** von V (über K), wenn sie zugleich l.u. und ein Erzeugendensystem von V ist.

$\Leftrightarrow$ Jeder Vektor $v \in V$ ist **eindeutig** darstellbar als $v = \sum_{i \in I} a_i v_i$

(6.6) Satz

Sei V ein eindeutig erzeugter VR, sei $(v_1, \dots, v_m)$ ein Erzeugendensystem und sei (o.E. nach eventueller Umnummerierung) $(v_1, \dots, v_n)$ eine maximale l.u. Teilfamilie. Dann ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V .

Beweis:

Idee: zeige, jeder Vektor $v_{n+1}, \dots, v_m$ ist Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$

- Ist $n = m$ so ist nichts zu zeigen
- Sei $n < m$
 $(v_1, \dots, v_n, v_{n+i}) \quad 1 \leq i \leq m - n$ ist l.a.

$$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_n, a : \sum_{j=1}^n a_j v_j + a \cdot v_{n+i} = \vec{0} \quad a_j, a \text{ nicht alle } 0$$

Wäre $a = 0$, so wäre $(v_1, \dots, v_n)$ l.a. ✗

$$\Rightarrow a \neq 0$$

$$\Rightarrow -a^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n a_j v_j = v_{n+i}$$

$$\Rightarrow v_{n+i} \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \quad 1 \leq i \leq m - n$$

$$\Rightarrow \langle v_1, \dots, v_n \rangle = V \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiel:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^2$$

$$v_3 = v_1 + v_2 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Basis von } \mathbb{R}^2$$

$$v_2 = v_3 - v_1 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Basis von } \mathbb{R}^2$$

$$v_1 = v_3 - v_2 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Basis von } \mathbb{R}^2$$

Jeder endlich erzeugte VR besitzt eine Basis.

(6.7) Steinitzscher Austauschsatz

Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und sei $(w_1, \dots, w_m)$ eine l.u. Familie.

Dann ist $m \leq n$ und es gibt $n-m$ Vektoren unter den $v_1, \dots, v_n$ die zusammen mit $w_1, \dots, w_m$ eine Basis von V bilden.

Beweis:

Induktion über m

I.A. $m=1$ (w_1) l.u. $\Rightarrow w_1 \neq 0$

$$\exists a_1, \dots, a_n \in K : w_1 = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad \exists i_0 : a_{i_0} \neq 0$$

o.E. $a_1 \neq 0$ (eventuell umnummerieren)

$$\Rightarrow v_1 = a_1^{-1} \left(w_1 - \sum_{i=2}^n a_i v_i \right) \Rightarrow v_1 \in \langle w_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

$\Rightarrow w_1, v_2, \dots, v_n$ ist Erzeugendensystem von V

$$\text{Sei } b \cdot w_1 + \sum_{i=2}^n b_i v_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow b \cdot \sum_{i=1}^n a_i v_i + \sum_{i=2}^n b_i v_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow b a_1 v_1 + \sum_{i=2}^n (b a_i + b_i) v_i = \vec{0}$$

$$a_1 \neq 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow b_2 = \dots = b_n = 0 \Rightarrow (w_1, v_2, \dots, v_n) \text{ l.u.}$$

I.V. Sei $(w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V und sei $(w_1, \dots, w_m, w_{m+1})$ l.u.

Wäre $m = n \Rightarrow (w_1, \dots, w_m)$ ist Basis von V

$\Rightarrow w_m$ ist Linearkombination von $w_1, \dots, w_m$

$\Rightarrow w_1, \dots, w_{m+1}$ ist l.a. ✗

$\Rightarrow m < n \Rightarrow m+1 \leq n$

$$\exists a_1, \dots, a_n : w_{m+1} = \sum_{i=1}^m a_i w_i + \sum_{i=m+1}^n a_i v_i$$

I.S. Wäre $a_{m+1} = \dots = a_n = 0$, so wäre $w_1, \dots, w_{m+1}$ l.a.

$\Rightarrow \exists i : m+1 \leq i \leq n, a_i \neq 0$, o.E. $a_{m+1} \neq 0$

$$\Rightarrow v_{m+1} = a_{m+1}^{-1} \left(w_{m+1} - \sum_{i=1}^m a_i w_i \right)$$

$\Rightarrow (w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n)$ ist Erzeugendensystem von V

$$\text{Sei } \sum_{i=1}^{m+1} b_i w_i + \sum_{i=m+2}^n b_i v_i = 0$$

$$= \sum_{i=1}^m b_i w_i + b_{m+1} \left(\sum_{i=1}^m a_i w_i + \sum_{i=m+1}^n a_i v_i \right) + \sum_{i=m+2}^n b_i v_i = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{i=1}^m (b_i + b_{m+1}a_i)w_i + b_{m+1} \cdot a_{m+1} \cdot v_{m+1} + \sum_{i=m+2}^n (b_i + b_{m+1}a_i)v_i &= 0 \\
\Rightarrow \quad b_i + b_{m+1}a_i &= 0, 1 \leq i \leq m \\
\quad b_{m+1} \cdot a_{m+1} &= 0, a_{m+1} \neq 0 \\
\quad b_i + b_{m+1}a_i &= 0, m+2 \leq i \leq n \\
\Rightarrow b_{m+1} = 0 &\Rightarrow b_1, \dots, b_n = 0 \\
\Rightarrow (w_1, \dots, w_{n+1}, v_{m+2}, \dots, v_n) &\text{ ist Basis von } V
\end{aligned}$$

(6.8) Korollar

Sei $(v_1, \dots, v_m)$ l.u. in V

Dann kann $(v_1, \dots, v_m)$ zu einer Basis ergänzt werden.

(6.8.1) Korollar

Seien $(v_1, \dots, v_n)$, $(w_1, \dots, w_m)$ Basen von V . Dann ist $m = n$.

Alle Basen von V haben dieselbe Anzahl von Elementen.

Beweis:

Aus (6.7) folgt $m \leq n$ und $n \leq m$

(6.9) Definition

Die Zahl n heißt die **Dimension** von V , $n = \dim V$

(6.10) Korollar

Sei $n = \dim V$. Dann sind je $n+1$ Vektoren in V l.a.

Beweis:

Die Aussage $m \leq n$ in (6.7)

$$\dim(\{0\}) := 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiel:

$$\dim(K^n) = n$$

$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ bilden eine Basis. $(e_1, \dots, e_n)$ heißt die Standardbasis.

(6.11) Satz

Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und sei $\dim V = n$.

Dann ist U endlich erzeugt und $\dim U \leq n$.

$\dim U = n \Leftrightarrow U = V$. Ferner lässt sich jede Basis von U zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis:

Sei $u_1, \dots, u_m$ eine maximale l.u. Familie in U (existiert, da $m \leq n$ sein muss (6.7)).

Sei $u \in U$

$\Rightarrow u_1, \dots, u_m, u$ ist l.a.

$\Rightarrow \exists a, a_1, \dots, a_m \in K$ nicht alle $= 0$ mit $a \cdot u + \sum_{i=1}^m a_i u_i = 0$

Wäre $a = 0$, so wäre $a_1 = \dots = a_m = 0$, da u_i l.u.

$\Rightarrow a \neq 0$

$\Rightarrow u = -a^{-1} \cdot \sum_{i=1}^m a_i u_i \Rightarrow u_1, \dots, u_m$ ist Basis von U .

Ist $m = n$, so ist $u_1, \dots, u_m$ eine Basis von V

$\Rightarrow U = V$

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $V \xRightarrow{(6.7)} \text{o.E. } u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ ist Basis von V .

q.e.d.

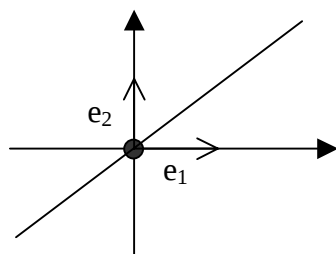
Beispiel:

1) $V = \mathbb{R}^2$

Nullpunkt • UVR

Gerade $\nearrow$ UVR $\dim = 1$

(durch •)



2) $V = \mathbb{R}^3$

Nullpunkt • UVR

Gerade $\nearrow$ UVR (durch •)

Ebene $\square$ UVR (durch •)

3) $V = K^n$ hat als Basis $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ heißt **Standardbasis** des K^n .

4) Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis der VR V , sei $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad a \in K \text{ eindeutig}$$

$(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ heißen die **Koordinaten** von v bzgl. $v_1, \dots, v_n$

$$\left. \begin{array}{l} V = (a_1, \dots, a_n) \\ W = (b_1, \dots, b_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v + w = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ c \cdot v = (c \cdot a_1, \dots, c \cdot a_n) \end{array}$$

$V \rightarrow K^n$
 $v \mapsto (a_1, \dots, a_n)$ ist bijektive Abbildung (sogar ein **Isomorphismus**)

Betrachte:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- hat bzgl. e_1, e_2 die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- hat bzgl. e_2, e_1 die Koordinaten $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
- hat bzgl. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten sind abhängig von der Wahl der Basis.

Seien U, W Untervektorräume von V , V ein VR

(6.12) Definition

$U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\}$ heißt die Summe von U und W .

Allgemeiner: sei $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von UVR von V . Dann heißt $\sum_{i \in I} V_i := \left\{ \sum_{i \in I} v_i : v_i \in V_i \right\}$ die **Summe** der V_i .

(in $\sum_{i \in I} v_i$ nur endlich viele $v_i \neq 0$)

(6.13) Satz

$\sum_{i \in I} V_i$ ist ein UVR von V . Er ist der kleinste UVR, der sämtliche V_i enthält, d.h.

$$\sum_{i \in I} V_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} V_i \right\rangle.$$

Beweis:

$$\text{Sei } W := \sum_{i \in I} V_i$$

$$\vec{0} \in W, \text{ da } \vec{0} = \sum_{i \in I} \vec{0} \text{ und } \vec{0} \in V_i$$

Seien $u, v \in W, c \in K$

$$u = \sum_{i \in I} u_i, v = \sum_{i \in I} v_i, v_i, u_i \in V_i$$

$$\Rightarrow u + v = \sum_{i \in I} (u_i + v_i), c \cdot v = \sum_{i \in I} c \cdot v_i \in W$$

$\Rightarrow W$ ist UVR

$V_i \subseteq W$. Sei $W' \subseteq V$ UVR mit $V_i \in W' \quad \forall i$

$$v \in W, v = \sum_{i \in I} v_i \Rightarrow v \in W', \text{ da alle } v_i \in W' \text{ sind}$$

$$\Rightarrow W \subseteq W'$$

q.e.d.

(6.14) Satz

Sei U, W UVR von V . Dann sind äquivalent:

(1) $U \cap W = \{0\}$

(2) Jeder Vektor $v \in U + W$ hat eindeutige Darstellung $v = u + w, u \in U, w \in W$

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2)

Sei $v = u + w = u' + w', u, u' \in U, w, w' \in W$

$$\Rightarrow \underbrace{u - u'}_{=0} = \underbrace{w' - w}_{=0} \in U \cap W = \{0\}$$

$$\Rightarrow u = u', w = w'$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sei $u \in U \cap W$. Dann hat $\vec{0}$ die Darstellung $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = u + (-u) \Rightarrow u = 0$

$\Rightarrow$ Behauptung

q.e.d.

(6.15) Definition

Die Summe $U + W$ heißt **direkt**, wenn $U \cap W = \{0\}$.

Bezeichnung: $U \oplus W$ statt $U + W$.

Seien U, W beliebige VR. Sei $U \oplus W = \{(u, w) : u \in U, w \in W\}$

$\left. \begin{array}{l} \text{Addition} \\ \text{Skalarmultiplikation} \end{array} \right\}$ komponentenweise

$U \oplus W$ heißt die (äußere) **direkte Summe** von U und W .

$$U' = \{(u, 0) : u \in U\} \quad W' = \{(0, w) : w \in W\}$$

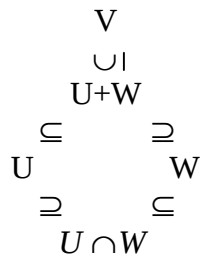
Es ist $U' + W' = U \oplus W$ und die Summe ist direkt, $U' \cap W' = \{0\}$

(6.16) Dimensionssatz

Sei V n -dimensionaler VR, $U, W \subseteq V$ seien UVR. Dann gilt:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Beweis:



Sei $v_1, \dots, v_k$ eine Basis von $U \cap W$, ergänze sie zu Basen $v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r$
 $v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_s$

von U bzw. W (Satz 6.11)

$$\dim U = r$$

$$\dim W = s$$

$$\dim U \cap W = k$$

Behauptung:

$v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r, w_{k+1}, \dots, w_s$ ist Basis von $U + W$

Sie sind Erzeugendensystem, da sie U und W erzeugen.

Sie sind l.u.:

$$\text{Sei } \vec{0} = \underbrace{\sum_{i=1}^k a_i v_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^r b_i u_i}_{\in W} + \sum_{i=k+1}^s c_i w_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=k+1}^s c_i w_i \in U \cap W \Rightarrow \exists d_i \in K : \sum_{i=k+1}^s c_i w_i = \sum_{i=1}^k d_i v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k d_i v_i - \sum_{i=k+1}^s c_i w_i = 0$$

$$\Rightarrow c_{k+1} = \dots = c_s = 0 = d_1 = \dots = d_k$$

$$\Rightarrow a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_r = 0 \quad \text{da } ((v_i), (u_i)) \text{ Basis sind}$$

(6.17) Beispiel

Sei V der R -VR der Folgen in R

Vektoren := Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$v^{(m)} := \left(v^{(m)}\right)_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } m = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v^{(0)} &= (1, 0, 0, \dots) \\ v^{(1)} &= (0, 1, 0, \dots) \end{aligned} \quad v^{(m)} \text{ sind l.u.}$$

$$\sum_{m \in \mathbb{N}}^{\dots} a_m v^{(m)} = (a_0, a_1, \dots) = 0 \Rightarrow a_m = 0 \quad \forall m$$

$v^{(m)}$ sind keine Basis! Der erzeugte UVR = $\{(a_0, a_1, \dots) : a_m = 0 \text{ f.f.a. } m\}$