

§5 Lineare Gleichungen

(5.1) Gleichungssysteme

Sei K ein Körper

Ein System von m Gleichungen mit n Unbekannten ist ein System der Form

$$\begin{aligned}
 & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 (*) \quad & a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{aligned}
 \qquad a_{ij}, b_i \in K$$

Ziel: Man kann die Lösungsgesamtheit L des Systems $(*)$ explizit berechnen.

(5.2) Unterschiedliche Gleichungssysteme

(A) Eine Gleichung

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$$

1.Fall:

$$a_1 = \dots = a_n = 0, b \neq 0 \rightarrow \text{keine Lösung}$$

2.Fall:

$$a_1 = \dots = a_n = 0, b = 0$$

$$L = K^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in K\}$$

3.Fall:

$$\exists j : a_j \neq 0$$

Sind dann $(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$ beliebig gewählt

$\uparrow$
 weglassen

so ist $(x_1, \dots, x_n)$ eine Lösung $\Leftrightarrow x_j = a_j^{-1} \left(b - \sum_{i \neq j} a_i x_i \right)$. Daher gilt:

$$L = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : x_i \in K \text{ für } i \neq j, x_j = a_j^{-1} \left(b - \sum_{i \neq j} a_i x_i \right) \right\}$$

(B) Zwei Gleichungen

$$(\square) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned}$$

1.Fall:

$$a_{11} = a_{21} = 0$$

$\Rightarrow x_1$ trägt nicht zum Wert der linken Seite bei

$$\Rightarrow L = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in K, (x_2, \dots, x_n) \text{ löst } (\square\square)\}$$

wobei $(\square\square) \quad \begin{aligned} a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned}$

2.Fall:

$$a_{11} \neq 0 \text{ oder } a_{21} \neq 0 \quad \text{o.E. } a_{11} \neq 0$$

Ersetze die 2.Gleichung durch

$$\widetilde{2.\text{Gleichung}} = 2.\text{Gleichung} - a_{11}^{-1}a_{21} \cdot 1.\text{Gleichung}$$

d.h.

$$(\square\square\square) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \widetilde{a}_{21}x_2 + \dots + \widetilde{a}_{2n}x_n &= \widetilde{b}_2 \end{aligned} \quad \text{wobei} \quad \begin{aligned} \widetilde{a}_{2i} &= a_{2i} - a_{11}^{-1} \cdot a_{12} \cdot a_{1i} \\ \widetilde{b}_2 &= b_2 - a_{11}^{-1} \cdot a_{12} \cdot b_1 \end{aligned}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ löst } (\square) \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \text{ löst } (\square\square\square)$$

$$\Rightarrow L = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_2, \dots, x_n) \text{ löst } \widetilde{2.\text{Gleichung}} \text{ und } x_1 = a_{11}^{-1}(b - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j)\}$$

(C) m Gleichungen

$$(*) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

1.Fall:

$$a_{11} = a_{21} = \dots = a_{m1} = 0$$

$$a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$\Rightarrow$ Löse $(**)$:

$$a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$L = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : (x_2, \dots, x_n) \text{ löst } (**), x_1 \in K\}$$

2.Fall:

$\exists i : a_{i1} \neq 0 \Rightarrow \text{o.E. } a_{11} \neq 0$ (Vertausche 1. und i-te Gleichung)

Bilde für $2 \leq i \leq m$

$$i\text{-te Gleichung} - a_{i1} \cdot a_{11}^{-1} \cdot 1.\text{Gleichung} = i\text{-te Gleichung}$$

d.h. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$$(\Delta) \begin{cases} \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{m2}x_2 + \dots + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases} \quad (***) \quad \begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{11}^{-1} \cdot a_{1i} \\ \tilde{b}_i &= b_i - a_{i1} \cdot a_{11}^{-1} \cdot b_1 \end{aligned}$$

$(x_1, \dots, x_n)$ ist Lösung von (***) $\Leftrightarrow$ Es ist Lösung von (*)

$$L = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : (x_2, \dots, x_n) \text{ löst } (\Delta) \quad x_1 = b_1 - a_{11}^{-1} \left(\sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \right) \right\}$$

(D) Beispiele

$$K = \mathbb{Z}/_{13}$$

	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^{-1}	1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	-7	12

=6

(1) i) $3x + 2y - 2z = 3$
 ii) $2x - y + z = 1$
 iii) $8x + y + 5z = 0$

1.Gleichung $\cdot 9$
 $x + 5y - 5z = 1$
 $\cdot 2$
 iv) $2x + 10y - 10z = 2$
 $\cdot 8$
 v) $8x + y - z = 8$

ii) - iv)
 $0x - 11y + 11z = -1$
iii) - v)
 $0x + 0y + 6z = -8$
 $z = -8 \cdot 6^{-1} = -8 \cdot 11 = -88 = -10 = 3$

Einsetzen :

$$\begin{aligned} \text{2. Gleichung : } -11y &= -1 - (11 \cdot 3) \\ y &= 7 \cdot (-34) = 7 \cdot 5 = 35 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1. Gleichung : } x &= 1 - 5y + 5z \\ &= 1 - 5 \cdot 9 + 5 \cdot 3 = 1 - 30 = -29 = -3 = 10 \end{aligned}$$

$$x = 10$$

$$\text{Lösung : } y = 9$$

$$z = 3$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 3x + 5y + z &= 4 \\ 9x + 2y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1. Gleichung} \cdot 3 \\ &= 9x + 15y + 3z = 12 \\ &= 9x + 2y + 3z = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. Gleichung} - \\ 0 &= 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es existiert keine Lösung

$$\begin{aligned} (3) \quad 3x + 5y + z &= 4 \\ 9x + 2y + 3z &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. Gleichung} - 3 \cdot \text{1. Gleichung} \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \end{aligned}$$

$$L = \{(x, y, z) : y, z \in K \text{ beliebig} \quad x = 9 \cdot (4 - 5y - z)\}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad 3x + 5y + z &= 4 \\ 9x + 3y + 4z &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. Gleichung} - 3 \cdot \text{1. Gleichung} \\ 0x + (3 - 2)y + (4 - 3)z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$L = \{(x, y, z) : z \in K, y = -z, \quad x = 9(4 - 5y - z)\}$$

Dieses Verfahren heißt **Gaußsches Eliminationsverfahren.**

(5.3) Homogene Gleichungen

$$(*) \quad a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

Ist $b_1 = \dots = b_m = 0$, so heißt das Gleichungssystem **homogen**.

Ein homogenes System hat stets die Lösung $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$. Im Allgemeinen hat es mehrere Lösungen.

Sei

$$\begin{aligned}
 & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\
 (+) \quad & \vdots \quad \quad \quad \text{homogen.} \\
 & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0
 \end{aligned}$$

(5.4) Satz

Die Gesamtheit der Lösungen eines homogenen Gleichungssystems (+) ist ein Untervektorraum von K^n , d.h. sind $(x_1, \dots, x_n)$ und $(y_1, \dots, y_n)$ Lösungen
 $\Rightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ ist Lösung und $(ax_1, \dots, ax_n)$ ist Lösung $\forall a \in K$

Beweis: Einsetzen

Sei nun ein Gleichungssystem (*) vorgegeben (nicht homogen).

Dann heißt (+) das zugehörige **homogene Gleichungssystem**

(5.5) Satz

Sei $(x_1, \dots, x_n)$ Lösung des Gleichungssystems (*), sei $(y_1, \dots, y_n)$ Lösung des Gleichungssystems (+).

Dann ist $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ Lösung des Systems (*)

Umgekehrt, ist $(z_1, \dots, z_n)$ Lösung von (*) so ist $(z_1 - x_1, \dots, z_n - x_n)$ Lösung von (+).

Beweis: Einsetzen

Man erhält **alle** Lösungen eines nicht homogenen Gleichungssystems, indem man zu **einer** Lösung sämtliche Lösungen des zugehörigen homogenen Systems addiert.

- Ist m (die Anzahl der Gleichungen) kleiner als n (die Anzahl der Unbekannten)
 $\Rightarrow$ Das homogene Gleichungssystem hat mehrere Lösungen
 Denn falls der Fall 1 eintritt $\Rightarrow$ eine Variable ist frei wählbar $\Rightarrow$ mehrere Lösungen
 Andernfalls bleibt zum Schluss eine Gleichung mit mehreren Variablen übrig $\Rightarrow$ mehrere Lösungen
- Ein homogenes System bleibt beim Eliminationsverfahren homogen