

§4 Vektorräume

Sei K ein Körper

(4.1) Definition

Ein **Vektorraum** über K ist eine Menge V , auf der eine Verknüpfung $+$ und eine Abbildung

$\bullet: K \times V \longrightarrow V$ definiert ist derart, dass gilt:

- I. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- II. a) $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$
 b) $a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$
 c) $(a + b) \cdot v = av + bv$
 d) $a(v + w) = av + aw$

Die Elemente aus V heißen **Vektoren**, Elemente aus K heißen **Skalare**.

Rechenregeln:

$$0 \cdot v = \vec{0} \quad (= \text{Null in } V)$$

$$(-1) \cdot v = -v$$

$$a \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \forall a \in K$$

Beweis: $(0 + 0) \cdot v = 0v + 0v = 0v \Rightarrow 0v = \vec{0}$ usw. q.e.d.

(4.2) Beispiele

(1) Sei $n \in \mathbb{N}_+$

$$V = K^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in K\}$$

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$c \cdot (a_1, \dots, a_n) := (ca_1, \dots, ca_n)$$

(2) Sei $M \neq \emptyset$ Menge

$$V := \{f : M \longrightarrow K\}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$c \in K \quad (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

(3) $V :=$ Die Folgen in K

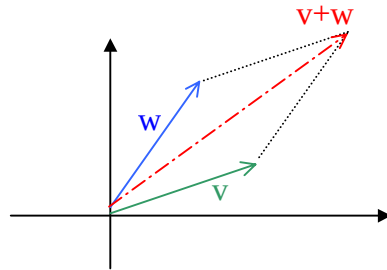
$$v = (a_0, a_1, \dots) \quad a_i \in K$$

$$w = (b_0, b_1, \dots)$$

$$v + w = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

$$c \cdot v = (c \cdot a_0, c \cdot a_1, \dots)$$

$$(4) \quad K = \mathbb{R} \\ V = \mathbb{R}^2$$



$$(5) \quad V = \{\vec{0}\} \quad \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}, \quad a \cdot \vec{0} = \vec{0} \text{ ist Vektorraum}$$

trivialer Vektorraum

$$(6) \quad n = 1 \quad V = K^1 = K \Rightarrow K \text{ ist } K\text{-VR}$$

$$\underbrace{a}_{\text{Skalar}} \cdot \underbrace{b}_{\text{Vektor}} \quad \underbrace{a}_{\text{Skalar}} \cdot \underbrace{(b+c)}_{\text{Vektor}}$$

$$(7) \quad K = \mathbb{Q} \quad V = \mathbb{R} \quad \Rightarrow \mathbb{R} \text{ ist } \mathbb{Q}\text{-VR}$$

$$\underbrace{2}_{\text{Skalar}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Vektor}} \quad \underbrace{2}_{\text{Skalar}} \cdot \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{Vektor}} \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \text{ nicht erlaubt}$$

(4.3) Definition

Seien $v_1, \dots, v_n \in V$, V ein VR/ K

Eine **Linearkombination** von $v_1, \dots, v_n$ ist ein Vektor der Form $v = \sum_{k=1}^n a_k v_k$, $a_k \in K$.

Sei allgemein $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V . Eine Linearkombination der Vektoren $(v_i)_{i \in I}$ ist ein Vektor der Form

$$v = \sum_{i \in I} a_i \cdot v_i \text{ wobei } a \in K, a_i = 0 \text{ für fast alle } i$$

(4.4) Definition

Ein **Untervektorraum** von V ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ derart, dass gilt:

- (1) U ist Untergruppe von V , d.h. $\vec{0} \in U$
 $v, w \in U \Rightarrow v + w, -v \in U$
- (2) $\forall a \in K, v \in U : a \cdot v \in U$

(4.5) Beispiele

(1) $V = K^n, m < n$

$$U := \{(a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n) : a_{m+1}, \dots, a_n = 0\} \Rightarrow U \text{ ist Untervektorraum}$$

(2) $\{\vec{0}\} \subseteq V$ ist stets ein Untervektorraum

(3) $V = \mathbb{R}^2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ist $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Linearkombination von v_1 und v_2 ?

$$\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} : v = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 \\ a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i. $2a_1 + a_2 = 0$

ii. $a_1 + 2a_2 = 2$

Auflösen von ii) $a_1 = 2 - 2a_2$ Einsetzen in i)

$$\Rightarrow 2(2 - a_2) + a_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3a_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_2 = \frac{4}{3} \quad \text{Einsetzen in ii)}$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 - 2 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

(4.6) Satz

Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren im K -Vektorraum V . Sei W die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $(v_i)_{i \in I}$. Dann ist W ein Untervektorraum von V .

Beweis:

$$\vec{0} \in W, \vec{0} = \sum_{i \in I} 0 \cdot v_i$$

Seien $v, w \in W$

$$\exists a_i, i \in I : v = \sum_{i \in I} a_i v_i, \exists b_i, i \in I : w = \sum_{i \in I} b_i v_i$$

$$\Rightarrow v + w = \sum_{i \in I} a_i v_i + \sum_{i \in I} b_i v_i$$

$$= \sum_{i \in I} (a_i + b_i) \cdot v_i$$

$$c \cdot v = c \cdot \sum_{i \in I} a_i v_i = \sum_{i \in I} (c \cdot a_i) \cdot v_i \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Bemerkung:Sei U Untervektorraum von V

$$v \in U \Rightarrow -v = (-1) \cdot v \in U$$

Die Menge aller Linearkombinationen der Familie $(v_i)_{i \in I}$ heißt der von $(v_i)_{i \in I}$ **erzeugte** Untervektorraum.

$$W = \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$$

$(v_i)_{i \in I}$ heißt **Erzeugendensystem** von W , wenn $W = \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$

$(v_i)_{i \in I}$ heißt **Erzeugendensystem** von V , wenn $V = \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$

$$\langle \emptyset \rangle := \{0\}$$

Beispiel:

$$V = \mathbb{R}^2, \quad (v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = a + 2b \\ y = a + 2b \end{matrix} \Rightarrow x = y$$

$$\text{Wenn } x = y \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = y \right\}$$

Bemerkung:Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie in V , $i_0 \in I$

Annahme: v_{i_0} ist Linearkombination der Familie $(v_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$, d.h. $v_{i_0} = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} a_i v_i$

$$\Rightarrow \langle (v_i)_{i \in I} \rangle = \langle (v_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \rangle$$

Zusatz zu (4.6):Sei $W = \langle (v_i)_{i \in I} \rangle \subseteq V$

Dann ist W der kleinste Untervektorraum, der sämtliche Vektoren v_i , $i \in I$ enthält.

Beweis:Zunächst gilt $v_i \in \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$

$$v_i = \sum_{j \in I} a_j v_j \quad a_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Sei $U \subseteq V$ Untervektorraum: $v_i \in U \quad \forall i$

U ist Vektorraum $\Rightarrow$ mit dem v_i enthält U auch alle Linearkombinationen der v_i

$\Rightarrow W \subseteq U \Rightarrow$ Behauptung q.e.d.