

§12 Permutationsgruppen

Sei $\Sigma_n := \Sigma(\{1, \dots, n\})$ die Gruppe der bijektiven Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ in sich mit der Komposition, (2.3) (4)

(12.1) Definition

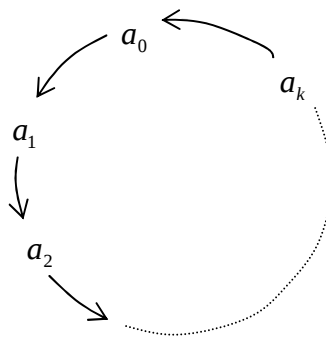
Sei $a_0, \dots, a_k \subseteq \{1, \dots, n\}$.

a_i seien paarweise verschieden.

Eine Permutation σ der Form

$$\sigma(a_i) = \begin{cases} a_{i+1} & \text{falls } i < k \\ a_0 & \text{falls } i = k \end{cases}$$

und $\sigma(a) = a$ für $a \notin \{a_0, \dots, a_k\}$ heißt ein **Zyklus**.



$$\sigma = \langle a_0, \dots, a_k \rangle.$$

Offenbar gilt:

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_k, a_0 \rangle$$

$$= \langle a_i, a_{i+1}, \dots, a_k, a_0, \dots, a_{i-1} \rangle \text{ und}$$

$$\langle a_0, \dots, a_k \rangle^{-1} = \langle a_k, a_{k-1}, \dots, a_0 \rangle$$

$\{a_0, \dots, a_k\}$ heißt der **Wirkungsbereich** des Zyklus $\langle a_0, \dots, a_k \rangle = \sigma$.

k heißt die **Länge** des Zyklus, $l(\sigma)$.

(12.2) Lemma

Seien $\sigma = \langle a_0, \dots, a_k \rangle$, $\tau = \langle b_0, \dots, b_l \rangle$ Zyklen mit disjunkten Wirkungsbereichen. Dann gilt:

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$$

Beweis:

$\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ wirken auf $\{a_0, \dots, a_k\}$ wie σ
und auf $\{b_0, \dots, b_l\}$ wie τ .

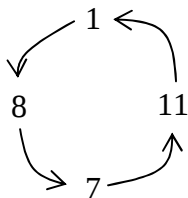
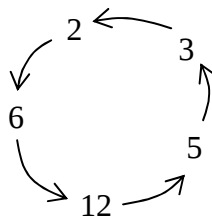
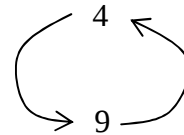
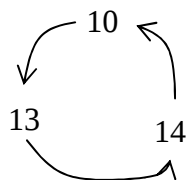
q.e.d.

In jeder Permutation kommen Zyklen vor.

(12.3) Beispiel

$$\sigma \in \Sigma_{15}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	6	2	9	3	12	11	7	4	13	1	5	14	10	15

 α_1  α_2  α_3  α_4  $\alpha_5 = \text{id}$

$$\Rightarrow \sigma = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$$

(12.4) Satz

Jede Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ ist bis auf Reihenfolge eindeutig ein Produkt von Zyklen mit paarweise disjunkten Wirkungsbereichen:

$$\sigma = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p$$

Diese heißt **Zyklenzerlegung** von σ .

Sei $\sigma = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p$. Dann heißt $l(\sigma) := \sum_{i=1}^p l(\alpha_i)$ die **Länge** von σ .

In (12.3) gilt $l(\sigma) = 3 + 4 + 1 + 2 = 10$

(12.5) Bemerkungen

(1) Seien $\sigma = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p$ und $\tau = \beta_1 \cdot \dots \cdot \beta_q$ Zyklenzerlegungen.

Im Allgemeinen lässt sich hieraus nicht die Zyklenzerlegung von $\sigma \circ \tau$ ablesen!

(2) Ein Zyklus $\langle a, b \rangle$ der Länge 1 heißt eine **Transposition**.

(12.6) Lemma

Sei $\sigma \in \Sigma_n$ und $\sigma = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p$ die Zyklenzerlegung.

Sei $\tau = \langle a, b \rangle$. Die Zyklenzerlegung von $\tau \circ \sigma$ ist gegeben durch:

(a) $\tau \circ \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p$ falls $\sigma(a) = a$ $\sigma(b) = b$

(b) $\langle a, b, a_1, \dots, a_k \rangle \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_p$
falls $\sigma(a) = a$ $\alpha_1 = \langle b, a_1, \dots, a_k \rangle$

(c) $\langle a, a_1, \dots, a_k, b, b_1, \dots, b_l \rangle \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_p$
falls $\alpha_1 = \langle a, a_1, \dots, a_k \rangle$
 $\alpha_2 = \langle b, b_1, \dots, b_l \rangle$

(d) $\langle a, a_1, \dots, a_k \rangle \langle b, b_1, \dots, b_l \rangle \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_p$
 $\alpha_1 = \langle a, a_1, \dots, a_k, b, b_1, \dots, b_l \rangle$

Beweis:

Alle Zyklen, die weder a noch b enthalten, kommen auch in der Zyklenzerlegung von $\tau \sigma$ vor. Man muss daher verifizieren, dass

(b) $\langle a, b \rangle \langle b, a_1, \dots, a_k \rangle = \langle a, b, a_1, \dots, a_k \rangle$

(c) $\langle a, b \rangle \langle a, a_1, \dots, a_k \rangle \langle b, b_1, \dots, b_l \rangle = \langle a, a_1, \dots, a_k, b, b_1, \dots, b_l \rangle$

und

(d) $\langle a, b \rangle \langle a, \dots, b, \dots, l \rangle = \langle a, \dots, a_k \rangle \langle b, \dots, b_l \rangle$

gilt.

q.e.d.

(12.7) Korollar

$l(\tau \circ \sigma) = l(\sigma) + 1$ oder $l(\tau \circ \sigma) = l(\sigma) - 1$

Beweis:

Im Fall (a), (b), (c) gilt +1, im Fall (d) -1.

q.e.d.

(12.8) Lemma

Jede Permutation ist ein Produkt von Transpositionen. (nicht eindeutig!)

Beweis:

$$\sigma = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_p.$$

Es genügt, α_i als Produkt von Transpositionen zu schreiben.

$$\text{Sei } \alpha_1 = \langle a_0, \dots, a_k \rangle$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$$

$$= \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \dots \langle \alpha_{k-1}, \alpha_k \rangle$$

$$\Rightarrow \text{Behauptung} \quad \text{q.e.d.}$$

(12.9) Satz

Sei $\sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_n$ ein Produkt von Transpositionen.

Ist n gerade, so ist $l(\sigma)$ gerade.

Ist n ungerade, so ist $l(\sigma)$ ungerade,

d.h. es gilt $(-1)^n = (-1)^{l(\sigma)}$.

Beweis: Induktion über n

$$n=1 \Rightarrow l(\sigma) = l(\tau_1) = 1$$

$$(12.7) \Rightarrow l(\tau_1 \dots \tau_n) = l(\tau_2 \dots \tau_n) \pm 1$$

$$\Rightarrow (-1)^{l(\tau_2 \dots \tau_n)} = (-1)^{n-1}$$

I.V.

$$\Rightarrow (-1)^{l(\tau_2 \dots \tau_n)} = (-1)^{\pm 1} \cdot (-1)^{l(\tau_2 \dots \tau_n)}$$

$$= (-1)^{\pm 1 + n - 1}$$

$$= (-1)^n$$

q.e.d.

(12.10) Korollar

Für $\sigma, \tau \in \Sigma_n$ gilt $(-1)^{l(\sigma\tau)} = (-1)^{l(\sigma)+l(\tau)}$.

Beweis:

Sei $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$, sei $\tau = \tau_1 \dots \tau_m$ Produkt von Transpositionen.

$$\Rightarrow \sigma\tau = \sigma_1 \dots \sigma_n \cdot \tau_1 \dots \tau_m$$

$$\Rightarrow (-1)^{l(\sigma\tau)} = (-1)^{n+m}$$

$$= (-1)^n \cdot (-1)^m$$

$$= (-1)^{l(\sigma)} \cdot (-1)^{l(\tau)}$$

q.e.d.

(12.11) Definition

$(-1)^{l(\sigma)}$ heißt das **Signum** von σ , $\text{sgn}(\sigma)$
 σ heißt gerade (ungerade), falls $\text{sgn}(\sigma) = 1$ (-1) ist.

Die Abbildung

$$\text{sgn} : \Sigma_n \longrightarrow \{1, -1\} = \mathbb{Z}^\times$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, da nach (12.10) $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau)$ gilt.

$\text{Ker}(\text{sgn}) = \{\sigma : \sigma \text{ gerade}\}$ ist eine Untergruppe der Ordnung $\frac{n!}{2}$. Sie heißt die
alternierende Gruppe, $A_n \subseteq \Sigma_n$.