

§10 Die komplexen Zahlen

Es gibt keine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ in den reellen Zahlen.

Ziel: Konstruktion eines Zahlenbereiches $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$, in dem diese Gleichung eine Lösung besitzt.

Heuristik:

Sei $\mathbb{C}$ schon konstruiert, und sei $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist dann $a + b \cdot i$ eine wohldefinierte Zahl.

Sei $a' + b'i$ eine weitere solche Zahl, so gilt

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + a(b'i) + (bi) \cdot a' + bi \cdot b'i \\ &= (aa' - bb') + (ab' + a'b)i\end{aligned}$$

$$\text{und } (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

Wir identifizieren nun $a + bi$ mit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und gelangen zu folgender

(10.1) Definition

Die Menge $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Addition und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + a'b)$$

heißt die Menge der **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$.

Wir identifizieren $a \in \mathbb{R}$ mit $(a, 0) \in \mathbb{C}$. Dies ist wegen

$(a, 0) \cdot (a', 0) = (aa', 0)$ verträglich mit der Multiplikation. Es ist nun

$i = (0, 1)$, und es gilt $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$

Es ist nun zweckmäßig, wieder zur Schreibweise $a + b \cdot i$ statt (a, b) zurückzukehren.

Ist $z = a + b \cdot i$, so heißt

a der **Realteil** von z , $a = \operatorname{Re}(z)$

b der **Imaginärteil** von z , $b = \operatorname{Im}(z)$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$$

$z \in \mathbb{C}$ heißt **rein-imaginär**, wenn $\operatorname{Re}(z) = 0$

(10.2) Satz

$\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ ist ein Körper, der $\mathbb{R}$ umfasst.

Beweis:

Die Axiome (3.1), I (Addition) sind klar.

II Multiplikation ist assoziativ: Verifiziere

$$\begin{aligned}&((a + bi) \cdot (a' + b'i)) (a'' + b''i) \\ &= (a + bi) ((a' + b'i) \cdot (a'' + b''i))\end{aligned}$$

kommutativ: Aus der Definition ersichtlich

$$1 \cdot (a + bi) = a + b \cdot i$$

inverses Element: Sei $z = a + bi \neq 0$

$$\Rightarrow (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \text{ und } a^2 + b^2 \neq 0$$

Daher gilt

$$(a + bi) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i \right) = 1$$

III Distributivgesetz

$$\begin{aligned} & (a + bi) ((a' + b'i) + (a'' + b''i)) \\ &= (a \cdot (a' + a'') - b \cdot (b' + b'')) + (a \cdot (b' + b'') + (a' + a'') \cdot b) \cdot i \\ &= (a + bi)(a' + b'i) + (a + bi)(a'' + b''i) \\ & \text{Distr.-Gesetz anwenden} \end{aligned}$$

IV $1 \neq 0$ ist klar

q.e.d.

(10.3) Definition

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$

$\bar{z} := a - bi$ heißt die zu z konjugierte komplexe Zahl

$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt der Betrag von z .

(10.4) Lemma

- (i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- (ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- (iii) $|z_1| = |\bar{z}_1|$
- (iv) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$
- (v) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- (vi) Dreiecksungleichung
 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- (vii) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$
 $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im} z \cdot i$

Beweis:

(i), (ii), (iii), (v) rechnet man nach

(iv) folgt aus $z \bar{z} = |z|^2$

(vii) $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$

$$z - \bar{z} = a + bi - a + bi = 2bi$$

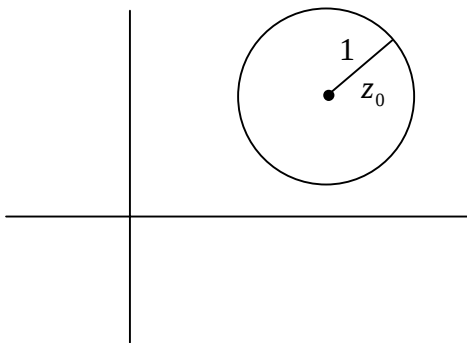
(vi) Es gilt $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ q.e.d.

Daher gilt

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2}) \\
 &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_2} \\
 &= |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2 \\
 &\leq |z_1|^2 + 2 |z_1| |z_2| + |z_2|^2 \\
 &\leq (|z_1| + |z_2|)^2.
 \end{aligned}$$

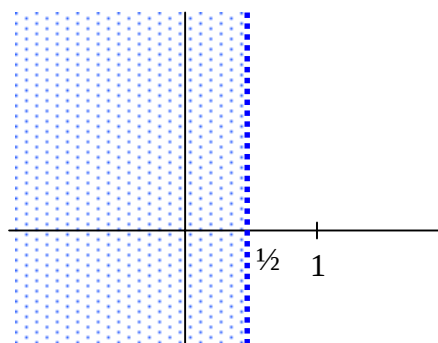
(10.5) Beispiele

(1) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < 1\}$



(2) $D = \left\{ z \neq 1 : \frac{|z|}{|z-1|} < 1 \right\}$
 $D = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 1 : |z| < |z-1|\}$

$$\begin{aligned}
 |z| < |z-1| &\Leftrightarrow |z|^2 < |z-1|^2 \\
 &\Leftrightarrow z\bar{z} < (z-1)(\bar{z}-1) \\
 &\Leftrightarrow z\bar{z} < z\bar{z} - (z + \bar{z}) + 1 \Leftrightarrow 0 < -(z + \bar{z}) + 1 \\
 &\Leftrightarrow 2 \operatorname{Re} z < 1 \\
 &\Leftrightarrow \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



(10.6) Die Matrix einer komplexen Zahl

Sei $z_0 = a_0 + b_0 i \in \mathbb{C}$.

Die Abbildung $\begin{array}{c} \mathbb{C} \xrightarrow{\tau_{z_0}} \mathbb{C} \\ z \mapsto z_0 \cdot z \end{array}$ ist ein Homomorphismus von 1-dimensionalen $\mathbb{C}$ -VR und hat die

Matrix $M_1^1(\tau_{z_0}) = (z_0)$.

Betrachte nun τ_{z_0} als $\mathbb{R}$ -Homomorphismus von $\mathbb{R}^2$ in sich. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ hat die Basis $1, i$. Es gilt:

$$\tau_{z_0}(1) = z_0 = a_0 + b_0 i$$

$$\tau_{z_0}(i) = z_0 \cdot i = -b_0 + a_0 i.$$

Für τ_{z_0} als $\mathbb{R}$ -Homomorphismus gilt also:

$$M_{1,i}^{1,i}(\tau_{z_0}) = \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}$$

Da $\tau_{z_1} \circ \tau_{z_0} = \tau_{z_1 z_0}$ ist, findet man in der Matrix-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 a_1 - b_0 b_1 & -a_0 b_1 - a_1 b_0 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 & a_0 a_1 - b_0 b_1 \end{pmatrix}$$

die Multiplikation komplexer Zahlen wieder.

Sei $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ein $\mathbb{R}$ -Homomorphismus mit $M_{1,i}^{1,i}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Genau dann ist f

ein $\mathbb{C}$ -Homomorphismus, wenn $a = d$ und $b = -c$.

In diesem Fall ist $f = \tau_{a+ci}$.