

§4 Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

$N = \{0, 1, 2, \dots\}$ Die Menge der natürlichen Zahlen
 $N_+ = \{1, 2, \dots\}$

Zu $a, b \in N$ sind $a + b$ und $a - b$ wohldefiniert.

(4.1) Tatsache

Ausgehend von 0 durchläuft man durch fortgesetzte Addition von 1 sämtliche natürlichen Zahlen.

Hierauf beruht das:

(4.2) Induktionsprinzip

Sei für $n \in N$ $A(n)$ eine Aussage. Angenommen, man kann zeigen

- (a) $A(0)$ ist wahr
- (b) Wenn $A(n)$ wahr ist für irgendein $n \geq 0$ dann ist $A(n+1)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in N$

Erläuterung:

$A(0)$ ist wahr (a)

$\Rightarrow A(1)$ wahr
(b) $n=0$

$\Rightarrow A(2)$ wahr
(b) $n=1$

(a) heißt **Induktionsanfang** (I.A.)

$A(n)$ heißt **Induktionsvoraussetzung** (I.V.)

(b) heißt **Induktionsschluss** (I.S.)

(4.3) Beispiele

(1) Sei $A(n)$ die Aussage: Es gilt die Gleichung: $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

I.A. $n = 0 \quad 0 = \frac{0 \cdot 1}{2} \quad \checkmark$

I.V. Angenommen, für ein n gilt:

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

I.S. $0 + 1 + 2 + \dots + n + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \Rightarrow A(n+1) \text{ wahr}$$

(2) Sei $q \in \mathbb{R}, q \neq 1, 0$

Dann gilt $1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

I.A. $n = 0 \quad q^0 = 1 = \frac{1 - q^1}{1 - q} = 1 \quad \checkmark$

I.V. Sei $1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

I.S. $(1 + \dots + q^n) + q^{n+1}$
 $\stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \Rightarrow \text{Behauptung}$

(3) Sei $A = \{1, \dots, n\}$

Dann hat A genau 2^n verschiedene Teilmengen

I.A. $n = 0 \quad A = \emptyset \quad P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, leere Menge hat $1 = 2^0$ Teilmengen $\checkmark$

I.V. $\{1, \dots, n\}$ habe 2^n Teilmengen

I.S. Teilmengen von $\{1, \dots, n, n+1\}$

I.V. $\Rightarrow$ Es gibt 2^n Teilmengen von $\{1, \dots, n+1\}$, die $n+1$ nicht enthalten

Es gibt 2^n Teilmengen von $\{1, \dots, n+1\}$, die $n+1$ enthalten

Es gibt $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen von $\{1, \dots, n+1\}$ $\leftarrow$

(4.4) Varianten

(a) Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, $A(n)$ Aussagen für $n \geq n_0$

I.A. $A(n_0)$ ist wahr

I.V. Sei für $n \geq n_0$ $A(n)$ wahr

I.S. dann ist $A(n+1)$ wahr

Dann ist $A(n)$ wahr $\forall n \geq n_0$

(b) Man kann in I.V. annehmen

I.V. $A(k)$ sei wahr $\forall k \leq n$

I.S. $\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr

Im Fall (a): $A(k)$ wahr für $n_0 \leq k \leq n$

(4.5) Definition durch Induktion

Man will alle Zahlen a_n definieren für $n \geq 0$

I.A. Man definiert a_0

I.V. Sei a_n definiert für ein n

I.S. Definiere a_{n+1}

Dann ist a_n definiert für alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiele:

1) $a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$

$$a^0 := 1$$

a^n sei definiert

$$a^{n+1} = a^n \cdot a$$

2) Seien $a, \dots, a_n$ $\sum_{k=0}^n a_k := a_0 + \dots + a_n$

I.A. $\sum_{k=0}^n a_k := a_0$ für $n = 0$

I.S. $\sum_{k=0}^{n+1} a_k := \sum_{k=0}^n a_k + a_{n+1}$

$$3) \prod_{k=0}^n a_k := a_0 \quad \text{für } n = 0$$

$$\prod_{k=0}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=0}^n a_k \right) \cdot a_{n+1}$$

$$4) a_0 = 1, a_1 = 1$$

Sei a_n definiert für $n \geq 1$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

1,1,2,3,5,8,13,... „Fibonacci-Folge“

5) Definiere Teilmengen von $\mathbb{N}$

$$A_0 := \mathbb{N}$$

$$A_{n+1} = \{2x + 3 : x \in A_n\}$$

$$A_1 = \{3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$A_2 = \{9, 13, 17, 21, \dots\}$$

$$6) \text{ **Fakultät } n!** \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, n \geq 1$$

$$0! := 1$$

$$(n+1)! := n! \cdot (n+1)$$

(4.6) Satz

Sei $A_n := \{1, \dots, n\}$

Dann gibt es genau $n!$ bijektive Abbildungen von A_n auf sich
 $= n!$ Vertauschungen der Elemente von $\{1, \dots, n\}$

I.A.: Es gibt eine bijektive Abbildung von $\{1\}$ auf sich

Sei die Aussage wahr für A_n

Es gibt nach I.V. $n!$ bijektive Abbildungen von $\{1, \dots, n+1\}$ welche $n+1$ auf $n+1$ abbilden.

Es gibt dann auch $n!$ bijektive Abbildungen von $\{1, \dots, n+1\}$, welche $n+1$ auf k abbilden.

$$1 \leq k \leq n$$

Zusammen gibt es also $n! + n \cdot n! = (n+1)!$ bijektive Abbildungen von $\{1, \dots, n+1\}$ auf sich.

(4.7) Satz

Seien $0 \leq k \leq n$ in $\mathbb{N}$

Es gibt genau

„ n über k “ $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ k -elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$

1. Beweis:

Wähle Anordnung $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ von $1, \dots, n$ und nehme $a_1, \dots, a_k$
 $\exists n!$ Anordnungen

Vertauschungen innerhalb des ersten Blocks und innerhalb des zweiten Blocks führen zur selben Teilmenge.

$\Rightarrow$ Jede Teilmenge kommt bei $n!$ Anordnungen genau $k!(n-k)!$ mal vor

$\Rightarrow \exists \frac{n!}{k!(n-k)!}$ k -elementige Teilmenge

2. Beweis:

Sei $A(n)$ die Aussage „Der Satz gilt für n und alle k “

$A(1):$ $k=0$ 1 Teilmenge $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ ✓
 $k=1$ 1 Teilmenge

Sei $A(n)$ wahr

Der Satz gilt für $k=0$, $k=n+1$, da $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$

Sei $1 \leq k < n+1$

Es gibt $\binom{n}{k}$ Teilmengen, die $n+1$ nicht enthalten, I.V.

Es gibt $\binom{n}{k-1}$ Teilmengen, die $n+1$ enthalten

$\Rightarrow$ Es gibt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ k -elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n+1\}$

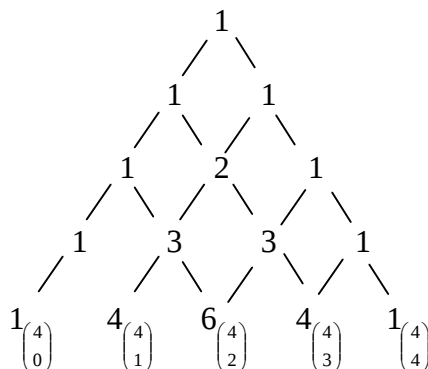
$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1) + n! \cdot k}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k} \Rightarrow \text{Behauptung} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

(4.8) Das Pascalsche Dreieck

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Nomenklatur:

$\binom{n}{k}$: Binomialkoeffizient



Pascalsches Dreieck

Regeln:

- $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{1} = n$

(4.9) Binomischer Lehrsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$

Dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Beweis:

Induktion über n

$$n=1 \quad (a+b)^1 = \binom{1}{0} b + \binom{1}{1} a \quad \checkmark$$

Gelte die Formel für n

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

(4.10) Korollar

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Beweis:

Sei $a = b = 1$

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

(4.10.1)

Es gilt:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^n a^k \cdot b^{n-k}$$

(4.11) Satz

Sei $N \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_+$

Es gibt $\binom{N+n-1}{n-1}$ Elemente $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$

mit $\sum_{i=1}^n a_i = N$

Beweis:

Betrachte $\{1, 2, 3, \dots, N+n-1\}$

wähle $m_1, \dots, m_{n-1} \in \{1, \dots, N+n-1\}$

Interpretiere diese als Schranken. Es gibt dann n Blöcke.

Sei a_k die Anzahl der Elemente des k -ten Blocks

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k = N$$

$\Rightarrow$ Es gibt so viele $((a_1, \dots, a_n))$ wie es $n-1$ -elementige Teilmengen gibt.

Beispiele:

$$N = 10$$

$$n = 5$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 führt zu

(3,2,0,2,3)