

§3 Relationen

Sei A eine nichtleere Menge

(3.1) Definition Relation

Eine **Relation** auf A ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times A = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A\}$.

Man schreibt xRy statt $(x, y) \in R$

(3.2) Äquivalenzrelationen

Definition:

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ auf A heißt

- (a) **reflexiv** wenn xRx gilt $\forall x \in A$
- (b) **symmetrisch** wenn $\forall x, y \in A : xRy \Leftrightarrow yRx$
- (c) **transitiv** wenn aus xRy und yRz stets xRz folgt

(3.3) Definition Äquivalenzrelation

$R \subseteq A \times A$ heißt **Äquivalenzrelation** wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

$x \sim y$ statt xRy

(3.4) Beispiele

- (1) $A = \mathbb{N}$, $x \sim y :\Leftrightarrow x$ und y gerade
 oder x und y ungerade

- (r) $x \sim x$ ✓
- (s) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ ✓
- (t) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ ✓

- (2) $A = \mathbb{R}$, $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

- (r) $x \sim x$, da $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$
- (s) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$, da $x - y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$

$$(t) \quad x \sim y, y \sim z \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z}, y - z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - y + y - z \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow x \sim z$$

$$(3) \text{ Sei } A \xrightarrow{f} B \quad x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

$$(r) \quad x \sim x, \text{ da } f(x) = f(x)$$

$$(s) \quad x \sim y, \text{ da } f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x)$$

$$(t) \quad x \sim y \sim z \quad f(x) = f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z)$$

$$(4) \quad x \sim y \Leftrightarrow x = y$$

$$(5) \quad x \sim y \quad \forall x, y$$

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A

Für $x \in A$ sei $A_x := \{u \in A : u \sim x\}$

(3.5) Satz

$$(1) \quad x \sim y, \text{ so ist } A_x = A_y$$

$$(2) \text{ Ist } x \not\sim y, \text{ so ist } A_x \cap A_y = \emptyset$$

Beweis:

$$(1) \text{ Sei } u \in A_x \Rightarrow u \sim x, \text{ und } x \sim y$$

$$\Rightarrow u \sim y$$

$$\Rightarrow u \in A_y \Rightarrow A_x \subseteq A_y$$

$$A_y \subseteq A_x \text{ genauso } \Rightarrow (1)$$

$$(2) \text{ Angenommen } A_x \cap A_y \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists u \in A_x \cap A_y$$

$$\Rightarrow u \sim x \text{ und } u \sim y$$

$$\Rightarrow x \sim y$$

(s)(t)

↯ zu $x \not\sim y$

Die Menge A_x heißt **Äquivalenzklasse** von x

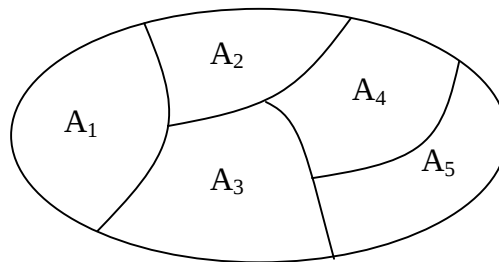
$$[x]_x \quad [x] = [y] \text{ wenn } x \sim y$$

(3.6) Partitionen

Definition: Eine Menge A von nichtleeren Teilmengen von A heißt **Partition** von A wenn gilt:

$$(a) \bigcup_{A' \in A} A' = A$$

$$(b) A' \cap A'' = \emptyset \quad \forall A', A'' \in A \text{ mit } A' \neq A''$$



(3.7) Satz

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann ist die Menge der Äquivalenzklassen eine Partition von A.

Sei A eine Partition von A. Dann ist

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists A' \in A \text{ mit } x, y \in A'$$

Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen sind genau die Elemente von A.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " folgt aus (3.5)

" $\Leftarrow$ " Transitivität: Sei $x \sim y$ und $y \sim z$

$$\Rightarrow A' \in A : x, y \in A' \quad \text{und} \quad \exists A'' \in A : y, z \in A''$$

$$\Rightarrow y \in A' \cap A'' \Rightarrow A' = A'' \Rightarrow x \sim z$$

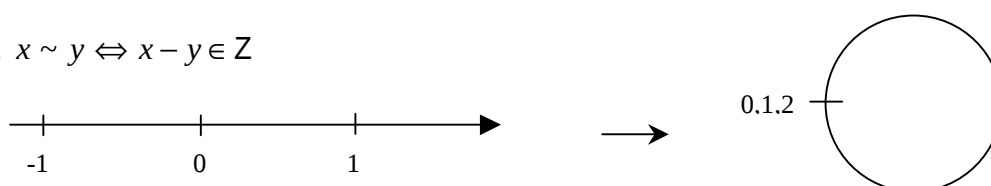
Die letzte Aussage folgt aus der Definition von $\sim$.

(3.8) Beispiele

(3.4)

$$(1) \mathbb{N} = [0] \cup [1] \quad , \quad \begin{aligned} [0] &= \{2n : n \in \mathbb{N}\} \\ [1] &= \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

$$(2) \mathbb{R}, x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$



Die Restklassen kann man sich auch vorstellen als Punkte eines Kreises vom Umfang 1, die Abbildung $x \mapsto [x]$ als Aufwickeln der Geraden auf den Kreis.

$$(3) A \xrightarrow{f} B \quad x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Die Menge der Äquivalenzklassen identifiziert sich kanonisch mit dem Bild (f).
 $[x] \leftrightarrow f(x)$

(3.9) Ordnungsrelationen

Sei $A \neq \emptyset$

Definition:

Eine Relation $\leq$ heißt **Ordnungsrelation** (Ordnung) auf A , wenn gilt:

- (a) $\leq$ ist reflexiv, d.h. $x \leq x \quad \forall x \in A$
- (b) $\leq$ ist transitiv, d.h. $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- (c) aus $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$

Eine Ordnung heißt total, wenn stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt $\forall x, y \in A$

(3.10) Beispiele

- (1) $\leq$ auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

ist Totalordnung auf $\mathbb{N}, \dots, \mathbb{R}$

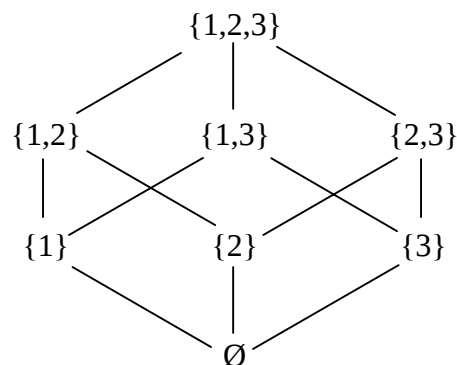
- (2) Sei M eine Menge, $A = P(M)$

Definiere Relation $\leq \quad M_1 \leq M_2 :\Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2$

$$P(M) \ni M_1 \subseteq M_2, M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

$$M_1 \subseteq M_2 \text{ und } M_2 \subseteq M_1 \Rightarrow M_1 = M_2$$

$$M = \{1, 2, 3\}$$



$x, y \in A$ heißen **vergleichbar** $:\Leftrightarrow x \leq y$ oder $y \leq x$

- (3) $\{a, b, c, \dots, z\}$ ist total geordnet
 ebenso die Stichwörter in einem Lexikon
 $x \geq y :\Leftrightarrow y \leq x$

(3.11) Definition größtes, maximales Element

Sei $(A, \leq)$ eine geordnete Menge. $a_0 \in A$ heißt

- (a) **größtes Element** in A , wenn $a_0 \geq a \ \forall a \in A$
 (b) **maximales Element**, wenn $a_0 \geq a$ für alle a , die mit a_0 vergleichbar sind.

Beispiele:

- $A = P(M) \quad M = \{1, 2, 3\}$ ist $\{1, 2, 3\}$ größtes Element
- $A = P(M) \setminus \{M\}$
 $\Rightarrow \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ sind maximale Elemente, es gibt kein größtes Element.

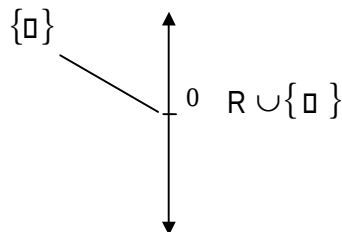
(3.12) Satz

Ist a_0 größtes Element $\Rightarrow a_0$ ist maximal. Es gibt höchstens ein größtes Element.

Ist A total geordnet, so ist a_0 größtes Element $\Leftrightarrow a_0$ maximal.

z.B. $\mathbb{R}$ hat kein maximales Element.

Beispiel:



$$\infty \geq x \quad \forall x \leq 0$$

∞, x nicht vergleichbar für $x > 0$

∞ ist maximal, kein größtes Element.

Analog: kleinstes und minimales Element

(3.13) Satz

Seien $(A, \leq), (B, \leq)$ geordnet und $A \xrightarrow{f} B$ eine Abbildung.

f heißt **monoton steigend**, wenn aus $x \leq y$ stets $f(x) \leq f(y)$ folgt.

f heißt **monoton fallend**, wenn aus $x \leq y$ stets $f(x) \geq f(y)$ folgt.