

§2 Mengen und Abbildungen

(2.1) Mengen

„Definition“ (G.Cantor) Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung und unseren Denkens zu einem Ganzen.

Erklärung:

1. bestimmt: von jedem Objekt steht fest, ob es zur Menge gehört oder nicht
2. wohlunterschieden: wenn $a = b$, dann Menge $\{a, b\} = \{a\}$
3. Objekte: Elemente $x \in A, x \notin A$
4. Bezeichnung: $\{\dots\}$
5. Die Menge aller Mengen ist nicht erlaubt!

Beispiele:

- (1) $\emptyset$ leere Menge hat kein Element
- (2) $A = \{1, 0, -1, 2\}$
Angabe durch Aufzählen der Elemente
- (3) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$
 $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ ist Primzahl}\}$
Definition durch charakteristische Eigenschaften
- (4) $A = \{\emptyset\}$ hat 1 Element
 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ hat 2 Elemente
 $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ hat 3 Elemente
- (5) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Natürliche Zahlen, hat unendlich viele Elemente
- (6) $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ganze Zahlen
- (7) $Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$
- (8) Die Menge der wohlschmeckenden Speisen
ist keine Menge, da wohlschmeckend nicht eindeutig definiert ist
- (9) Die Menge der Sterne, die keine Planeten haben
ist eine Menge, da feststeht ob ein Stern dazugehört oder nicht, auch wenn man es (noch) nicht entscheiden kann.
- (10) $\mathbb{R}$ reelle Zahlen
- (11) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{1, -1\}$

(2.2) Teilmengen

Seien A, B Mengen

Definition: $A \subseteq B$ „ A ist eine **Teilmenge** von B “
 $\Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$
 Auch: B umfasst A , $B \supseteq A$

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ und } A \neq B$$

Beispiele:

- (1) $A \text{ Menge} \Rightarrow \emptyset \subseteq A$
- (2) $A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$
- (3) $A \subseteq B \text{ und } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
- (4) Sei $x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A$

Definition: Sei A eine Menge

Die Menge aller Teilmengen von A heißt die **Potenzmenge** von A , $P(A)$

Beispiele:

- (1) $A = \emptyset, P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
 - (2) $A = \{0,1\}, P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$
- Sei A eine Menge, $\Rightarrow A \in P(A)$

Im Allgemeinen ist $P(A)$ nicht explizit beschreibbar, z.B. $P(N)$.

(2.3) Operation mit Mengen

- Seien A, B Mengen

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} \quad \text{Durchschnitt}$$

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} \quad \text{Vereinigung}$$

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\} \quad \text{Differenz aus A und B}$$

Beispiel:

$$A = \{0,1,2,3\} \qquad B = \{2,3,4,5\}$$

$$A \cap B = \{2,3\}$$

$$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$A \setminus B = \{0,1\}$$

- Sei $A \subseteq B$

$$C A := \{x : x \in B \text{ und } x \notin A\} \quad \text{Komplement von A in B}$$

oft genauer: $C^B A$

oft kürzer: $\overline{A}$

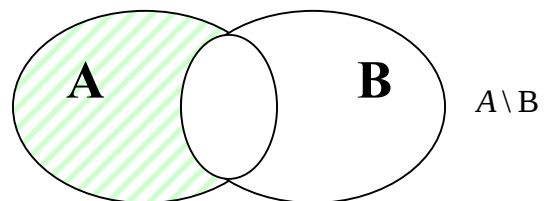
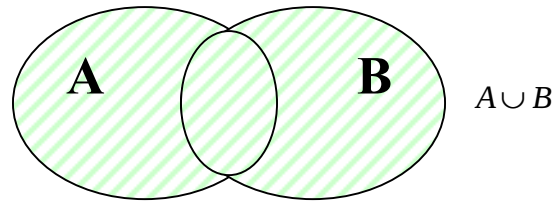
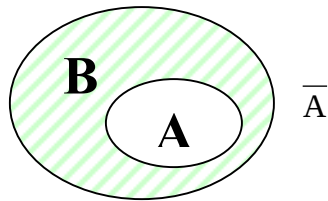
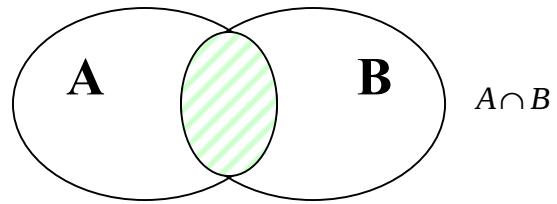
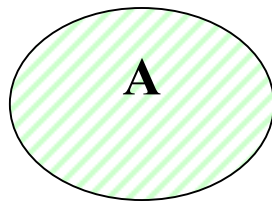
- Seien A, B beliebige Mengen

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

wobei (x, y) das geordnete Paar bezeichnet

kartesisches Produkt von A und B

(2.4) Veranschaulichung von Mengen



Offenbar gelten:

- (a) $A \cap B = B \cap A$
- (b) $A \cup B = B \cup A$
- (c) $A \cap B \subseteq A$
- (d) $A \cup B \supseteq A$
- (e) Sei $A \subseteq B$
 $A \cap \bar{A} = \emptyset$
 $A \cup \bar{A} = B$

(2.5) Beispiel für den Beweis der Gleichheit von Mengen

Satz: Seien A, B Mengen. Dann gilt:
 $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Beweis: Sei $x \in A \cap (B \setminus C)$
 $\Rightarrow x \in A$ und $x \in B \setminus C$
 $\Rightarrow x \in A$ und $x \in B$ und $x \notin C$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \in A \cap B \quad \text{und} \quad x \notin A \cap C, \text{ da } x \notin C \\
&\Rightarrow x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) \\
&\Rightarrow A \cap (B \setminus C) \subseteq (A \cap B) \setminus (A \cap C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Sei } x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) \\
&\Rightarrow x \in A \cap B \quad \text{und} \quad x \notin A \cap C \\
&\Rightarrow x \in A \quad \text{und} \quad x \in B \quad \text{und} \quad x \notin C, \text{ da } x \in A \\
&\Rightarrow x \in A \quad \text{und} \quad x \in B \setminus C \\
&\Rightarrow x \in A \cap (B \setminus C) \\
&\Rightarrow (A \cap B) \setminus (A \cap C) \subseteq A \cap (B \setminus C) \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Seien $A_1, A_2, \dots, A_n$ Mengen

- $\bigcap_{i=1}^n A_k = \{x : x \in A_k \text{ für } 1 \leq k \leq n\}$
- $\bigcup_{i=1}^n A_k = \{x : \exists k : x \in A_k\}$
- $\prod_{i=1}^n A_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k \in A_k\}$ direktes Produkt

(2.6) Abbildungen

Definition: Seien A, B Mengen. Eine **Abbildung** von A nach B ist eine Vorschrift f , die angibt, wie jedem Element x einer Menge A eindeutig ein Element y der Menge B zugeordnet wird. Diese wird mit $f(x)$ bezeichnet.

$$\begin{aligned}
&A \xrightarrow{f} B \\
&x \mapsto f(x)
\end{aligned}$$

A heißt **Definitionsbereich** von f .

B heißt **Bildbereich** von f .

Zwei Abbildungen sind gleich $A \xrightarrow{f} B$, $A \xrightarrow{g} B$
wenn $f(x) = g(x)$ ist für alle $x \in A$

Für $x \in A$ heißt $f(x)$ das Bild von x unter f .

Beispiele:

$$A = B = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\
&x \mapsto f(x) = x^2
\end{aligned}$$

- (2) $R \xrightarrow{f} R$
 $x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$
- (3) $R \xrightarrow{f} R$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist keine Abbildung, da $f(0)$ nicht definiert ist
- (4) $R \setminus \{0\} \xrightarrow{f} R$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist eine Abbildung
- (5) $R \xrightarrow{f} R$
 $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
- (6) $R \xrightarrow{f} R$
 $x \mapsto 1 \text{ oder } -1$ ist keine Abbildung
- (7) $R \xrightarrow{f} R$
 $x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 0 \\ x+2 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$ ist keine Abbildung, da $0 \mapsto \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$
- (8) $R \xrightarrow{|\cdot|} R$
 $x \mapsto |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ Betrag
- (9) $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $A = P(M)$
 $A \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$
 $P \mapsto \text{Anzahl seiner Elemente}$
- (10) Sei A eine Menge
 $A \xrightarrow{id_A} A$
 $x \mapsto x$
- (11) Sei $A \xrightarrow{f} B$ Abbildung, $A' \subseteq A$
 $A' \xrightarrow{f|_{A'}} B$
 $x \mapsto f(x)$ heißt **Einschränkung** von f auf A' $f|_{A'}$

Achtung:

$$\begin{array}{ccc} \{0,1\} \xrightarrow{f} \{0,1,2\} & \neq & \{0,1\} \xrightarrow{f} \{0,1\} \\ x \mapsto x & & x \mapsto x \end{array}$$

(2.7) Kompositionen

Definition: Seien $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ Abbildungen

Die Abbildung

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)) \end{array}$$

h heißt die **Komposition** von f und g

$$h = g \circ f \quad \text{Also: } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Beispiel:

$$(1) \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad , \quad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \quad \quad \quad x \mapsto x^2 - 2 \end{array}$$

$$g \circ f(x) = (x^2)^2 - 2 = x^4 - 2$$

$$f \circ g(x) = (x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4$$

(2.8) Regeln für Kompositionen

Satz: Seien $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ Abbildungen

Dann gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Beweis:

Sei $x \in A$, dann ist

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x) \Rightarrow \text{Behauptung} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

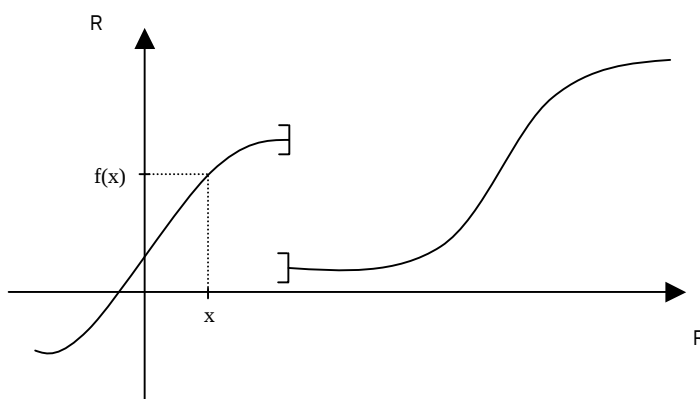
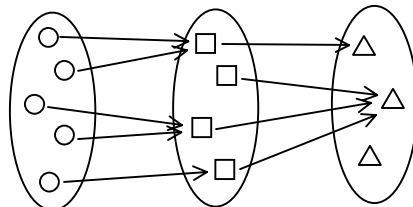
Wir schreiben $h \circ g \circ f$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & & \downarrow g \\ D & \xrightarrow{v} & C \end{array}$$

Wenn $g \circ f = v \circ u$

so spricht man von einem **kommutativen Diagramm**

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$



(2.9) Der Graph

Definition: Sei $A \xrightarrow{f} B$. Die Teilmenge
 $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B$
 heißt der **Graph** von f

(2.10) Das Bild

Definition: Sei $A' \subseteq A$, $A \xrightarrow{f} B$ Abbildung
 $f(A') := \{f(x) : x \in A'\} \subseteq B$
 heißt **Bild** von A' unter f
 $f(A)$ heißt das **Bild** von f

Bemerkung: Sei $x \in A$. Dann gilt $f(\{x\}) = \{f(x)\}$

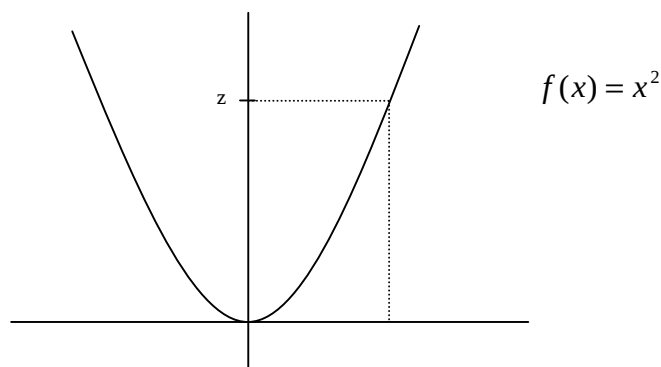
Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\text{Bild}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } x \in \mathbb{R} &\Rightarrow x^2 \geq 0 \\ \Rightarrow \text{Bild}(f) &\subseteq \{y : y \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } z \in \{y : y \geq 0\} &\quad \text{zu zeigen } \exists x \in \mathbb{R} \text{ mit } x^2 = z \\ x := \sqrt{z} &\text{ erfüllt } x^2 = z \\ \Rightarrow \text{Bild}(f) &\supseteq \{y \geq 0\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f([0,2]) &= [0,4] \\ f([-2,2]) &= [0,4] \end{aligned}$$

(2.11) Das Urbild

Definition: Sei $B' \subseteq B$

$$f^{-1}(B') := \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

heißt das **Urbild** von B' unter f

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \text{UI} & \\ & B' & \end{array}$$

Sei $y \in B$ Statt $f^{-1}(\{y\})$ schreibt man $f^{-1}(y)$

$$x \in f^{-1}(B') \Leftrightarrow f(x) \in B'$$

Beispiele:

- $f(x) = x^2$
 $f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$
- $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^5 - 3x^2 + 2x - 10$
 $f^{-1}(0)$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $x^5 - 3x^2 + 2x - 10 = 0$

(2.12) Lemma

Seien $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ Abbildungen. Sei $C' \subseteq C$. Dann gilt:

$$(g \circ f)^{-1}(C') = f^{-1}(g^{-1}(C'))$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)^{-1}(C') & \quad x \in A \\ \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in C' \\ \Leftrightarrow g(f(x)) \in C' \\ \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(C') \\ \Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(C')) & \Rightarrow \text{Behauptung} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Beispiel: Ist $y \in B$ nicht in $f(A) = \text{Bild}(f)$, so gilt:

$$f^{-1}(y) = \emptyset$$

(2.13) Satz

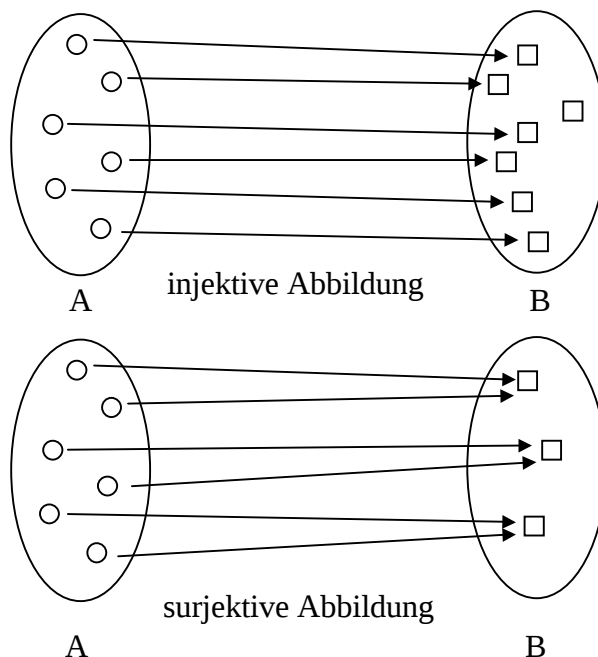
Sei $A \xrightarrow{f} B$ eine Abbildung. Sei $B_1, B_2 \subseteq B$. Dann gilt:

- (a) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- (b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- (c) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

(2.14) Definition injektiv, surjektiv, bijektiv

Definition: Sei $A \xrightarrow{f} B$ eine Abbildung.

- (a) f heißt **injektiv** $\Leftrightarrow a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt $f(a) \neq f(b)$
- (b) f heißt **surjektiv** $\Leftrightarrow \forall b \in B \exists a \in A$ mit $f(a) = b$
- (c) f heißt **bijektiv** $\Leftrightarrow \forall b \in B \exists! a \in A$ mit $f(a) = b$


(2.15) Satz

- (a) f ist surjektiv $\Leftrightarrow f(A) = B$
 $\Leftrightarrow \forall b \in B: f^{-1}(b) \neq \emptyset$
- (b) f ist bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist injektiv und surjektiv

Beweis:

- (a) ist klar
- (b) Sei f bijektiv und sei $a \neq b$ in A mit $f(a) = f(b)$
 $\Rightarrow f(a)$ hat a und b als Urbild Widerspruch zur Bijektivität (↯)

$\Rightarrow f$ injektiv

q.e.d.

Sei f injektiv und surjektiv f surjektiv $\Rightarrow \forall b \in B$ existiert ein Urbild von b in A f injektiv $\Rightarrow$ für $b \in B$ existiert höchstens ein Urbild in A

$$\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \exists! \text{Urbild}$$

(2.16) Kanonische Injektion

Sei $A' \subseteq A$

$$A' \xrightarrow{f_{A'}} A$$

$$x \mapsto x$$

= kanonische Injektion von A' in A

(2.17) Beispiel

Sei $A \xrightarrow{f} B$ eine bijektive Abbildung $\Rightarrow \forall y \in B : \exists! x \in A$ mit $f(x) = y$

Definiere Abbildungen

$$B \xrightarrow{g} A$$

$$y \mapsto x$$

wobei $f(x) = y$

Dies ist eine wohl definierte Abbildung!

Es gilt:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = x, \quad x \in A$$

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = y$$

Also:

(2.17.1) Identität

$$g \circ f = id_A$$

$$f \circ g = id_B$$

(2.18) Umkehrabbildung

Definition: g heißt die Umkehrabbildung (inverse Abbildung) von f , Bezeichnung f^{-1} **Bemerkung:** Sei $B' \subseteq B$ und f bijektiv

Dann bezeichnet $f^{-1}(B')$ sowohl das Urbild unter f von B' als auch das Bild von B' unter f^{-1} .

Beide Definitionen führen auf dieselbe Menge $\subseteq A$.

(2.20) Satz

(a) Sei $A \xrightarrow{f} B$ bijektiv

Dann ist f^{-1} bijektiv. Es gilt: $(f^{-1})^{-1} = f$

(b) Seien $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ bijektiv

Dann ist $g \circ f$ bijektiv und es gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Begriffserläuterung:

Hauptsatz = Theorem

Satz

Hilfssatz = Lemma (ta)

Folgerung = Korollar

(2.19) Lemma

Sei $A \xrightarrow{f} B$ bijektiv und $B \xrightarrow{h} A$ äquivalent

(a) $h = f^{-1}$

(b) $f \circ h = id_B$

Beweis:

"(a) $\Rightarrow$ (b)" $f \circ f^{-1} = id_B$ (nach 2.17.1)

"(b) $\Rightarrow$ (a)" Sei $y \in B$, $h(y)$ und $f^{-1}(y)$ erfüllen die Gleichung

$$f \circ h(y) = y, f(f^{-1}(y)) = y \Rightarrow h(y) = f^{-1}(y), \text{ da } f \text{ injektiv}$$

Beweis von (2.20):

Zu a)

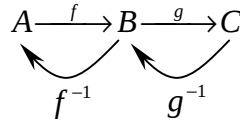
Sei $x \in A$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow f^{-1} \text{ ist surjektiv}$$

Seien $y_1, y_2 \in B$, $y_1 \neq y_2$

$$\Rightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2), \text{ da} \\ f(f^{-1}(y_1)) = y_1 \neq y_2 = f(f^{-1}(y_2)) \Rightarrow f^{-1} \text{ injektiv}$$

$$\text{Da } f^{-1} \circ f = id_A, \text{ folgt aus (2.19) } (f^{-1})^{-1} = f$$

**Zu b)**

Sei $z \in C$

Da g surjektiv $\Rightarrow \exists y \in B$ mit $g(y) = z$

Da f surjektiv $\Rightarrow \exists x \in A$ mit $f(x) = y$
 $\Rightarrow g(f(x)) = z \Rightarrow g \circ f$ surjektiv

Sei $x_1 \neq x_2$ in A

Da f injektiv $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Da g injektiv $\Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$
 $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ id_B \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} = id_C \xRightarrow{(2.19)} \text{ Behauptung} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{array}$$

bijektive Abbildung von A in sich $\Leftrightarrow$ Vertauschung der Elemente von A
 = "Permutation von A "

$$f^{-1} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{array}$$

(2.21) Funktionen

Sei A eine Menge

Definition: Abbildungen von $A \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ ($, =$ oder)
 heißen **Funktionen**.

Seien $A \xrightarrow{f} R$, $A \xrightarrow{g} R$ Funktionen

$$f + g \quad x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$f - g \quad x \mapsto f(x) - g(x)$$

$$f \cdot g \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

$$\begin{array}{ll} f - f & A \rightarrow R \\ 0: & x \mapsto 0 \end{array} \quad \text{Nullfunktion}$$

(2.22) Familien

Beispiel: Telefonnummer: 41 11 42 $\{4,1,1,1,4,2\} = \{1,2,4\}$

Dies ist zu unterscheiden von der Menge der Ziffern.

Dies geschieht durch Einführung einer Indexmenge

Indexmenge $I = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{\downarrow} & \frac{2}{\downarrow} & \frac{3}{\downarrow} & \frac{4}{\downarrow} & \frac{5}{\downarrow} & \frac{6}{\downarrow} \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

Die obige Nummer ist dann die Abbildung

Definition: Sei I eine Indexmenge, A eine Menge.
Eine Familie in A mit Indexmenge I ist eine Abbildung
$$I \xrightarrow{\varphi} A$$

statt $\varphi(i) \rightarrow (\varphi_i)_{i \in I}$ „Ansammlung von Elementen von A “
z.B. $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq 6}$

Beispiel: Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen (Verallgemeinerung von $A_1, \dots, A_n$)

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} A_i &:= \{x : x \in A_i \forall i \in I\} \\ \bigcup_{i \in I} A_i &:= \{x : \exists i \in I : x \in A_i\} \end{aligned}$$