

## §9 Der Mittelwertsatz

Im Folgenden sei  $I = [a, b]$  ein kompaktes Intervall.

### (9.1) Satz von Rolle

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $]a, b[$ .

Gilt  $f(a) = f(b)$ , so existiert  $\xi_{(xi)} \in ]a, b[$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

#### **Beweis:**

Falls  $f(x) = f(a)$  für alle  $x \in I$ , so ist jedes  $\xi \in ]a, b[$  geeignet.

Sei etwa  $f(x) > f(a)$ .

$\Rightarrow f(I) = [u, v]$  mit  $u < v$

Sei  $\xi \in I$  mit  $f(\xi) = v$

$\Rightarrow \xi \in ]a, b[$

Es gilt nun

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x < \xi \\ \leq 0 & \text{für } x > \xi \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(\xi) = 0$ .

Analog für  $f(x) < f(a)$ .

q.e.d.

### (9.2) Mittelwertsatz

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $]a, b[$ . Dann existiert ein  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

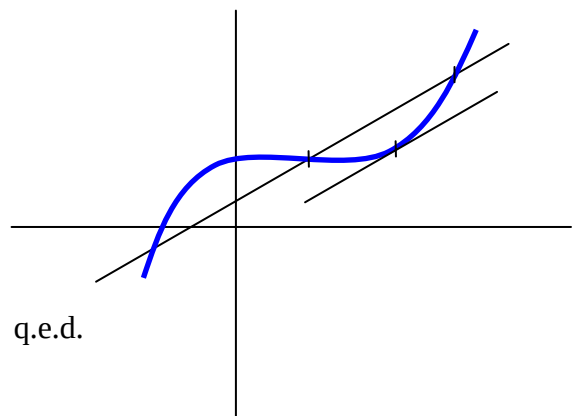
#### **Beweis:**

Betrachte  $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$

Dann gilt  $g(a) = g(b) = \frac{f(a) \cdot b - f(b) \cdot a}{b - a}$

$\Rightarrow \exists \xi \in ]a, b[ : g'(\xi) = 0$

$\Rightarrow g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$



q.e.d.

### (9.3) 2.Mittelwertsatz

Seien  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $]a, b[$ . Sei  $g'(x) \neq 0$  für  $x \in ]a, b[$ . Dann existiert ein  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**Beweis:**

Zunächst gilt  $g(a) \neq g(b)$

(wegen (9.1))  $\Rightarrow$  linke Seite ist definiert.

Betrachte  $h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$ .

$$\Rightarrow h(a) = h(b) = \frac{f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$\stackrel{(9.1)}{\Rightarrow} \exists \xi \in ]a, b[: h'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad \text{q.e.d.}$$

### (9.4) Korollar

Für  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  sind äquivalent:

- (1)  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ ;
- (2)  $f(x) = f(a)$  für alle  $x \in ]a, b[$

**Beweis:**

„(2) $\Rightarrow$ (1)“ ist klar.

Wäre  $f(x_0) \neq f(a)$ , so gäbe es ein  $\xi \in ]a, x_0[$  mit  $f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \neq 0$   $\nexists$  q.e.d.

### (9.5) Korollar

Äquivalent sind:

- (1)  $f$  ist streng monoton steigend auf  $[a, b]$
- (2)  $f'(x) \geq 0$  für  $x \in ]a, b[$ .

**Beweis:**

Wäre  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ , so gälte für  $x < x_0$  hinreichend nahe bei  $x_0$ :

$$f(x) > f(x_0).$$

$\Rightarrow f$  nicht monoton steigend.

Ist  $f$  nicht monoton steigend, so gibt es  $x_1 < x_2$  mit  $f(x_1) > f(x_2)$ .

$$\Rightarrow \exists \xi \in ]x_1, x_2[ : f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0. \quad \text{q.e.d.}$$

## Die Regeln von de l'Hospital

Seien  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und sei  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > 0}} g(x) = 0$ .

Sei  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ .

### (9.6) Satz

Falls  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, so existiert auch  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$  und beide Grenzwerte sind gleich.

#### Beweis:

$f$  und  $g$  können nach  $a$  stetig fortgesetzt werden durch  $f(a) = g(a) = 0$ .

Sei nun  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $]a, b[$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Es gilt dann  $g(x_n) \neq 0$ , da  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$ .

Auf die nach  $]a, b[$  fortgesetzten Funktionen wenden wir (9.3) an.

$$\exists \xi_n \in ]a, x_n[ \text{ mit } \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a$ . Daher gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \text{q.e.d.}$$

### (9.7) Bemerkungen

(1) Sei  $x_0 \in ]a, b[$ , sei  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  und  $g'(x) \neq 0$  für  $x \neq x_0$ .

Existiert dann  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , so existiert auch  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)}$  und beide Grenzwerte sind gleich.

(2) (9.6) gilt auch für  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ .

Wende dazu (9.6) auf  $]x_0, b[$  und  $]a, x_0[$  an.

## (9.8) Beispiele

$$(1) \frac{f}{g} = \frac{\sin 2x}{e^x - 1}, \quad x_0 = 0.$$

$$\frac{f'}{g'} = \frac{2 \cos(2x)}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$$

$$(2) \frac{f}{g} = \frac{\sin x^2}{e^{x^2} - 1}$$

$$\frac{f'}{g'} = \frac{2x \cos x^2}{2x \cdot e^{x^2}}$$

$$\frac{f''}{g''} = \frac{2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

## (9.9) Korollar

Sei für  $k < n$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > 0}} f^{(k)}(x) = 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > 0}} g^{(k)}(x).$$

Wenn dann  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > 0}} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$  existiert, so existiert auch  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > 0}} \frac{f(x)}{g(x)}$  und beide Grenzwerte sind gleich.

**Beweis:**

Induktion über  $n$ .

q.e.d.

## (9.10) Satz

Seien  $f, g : ]a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, sei  $a > 0$ , sei  $g'(x) \neq 0$  für  $x \in ]a, \infty[$  und sei  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ .

Wenn dann  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, so existiert auch  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  und beide Grenzwerte sind gleich.

Betrachte  $F, G : \left]0, \frac{1}{a}\right[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dann gilt  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} G(x) = 0$

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$