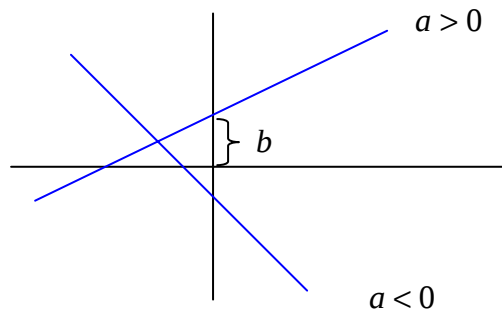


§8 Differenzierbare Funktionen

(8.1) Geraden

Der Graph einer Funktion $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade.



a heißt auch die **Steigung** der Geraden.

Beachte: Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto ax$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ in sich.

(8.2) Beispiele

(1) Sei $x_0 \neq x_1$ und $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Bestimme die Gleichung der Geraden durch (x_0, y_0) und

(x_1, y_1) :

$$\text{Löse } y_0 = ax_0 + b$$

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$\Rightarrow a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$b = y_0 - ax_0$$

(2) Bestimme die Gerade mit Steigung a durch den Punkt (x_0, y_0) .

$$y = a \cdot (x - x_0) + y_0$$

(8.3) Definition

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt **offen**, wenn $\forall x \in D$ ein $\delta > 0$ existiert, mit $]x - \delta, x + \delta[$

Beispiele:

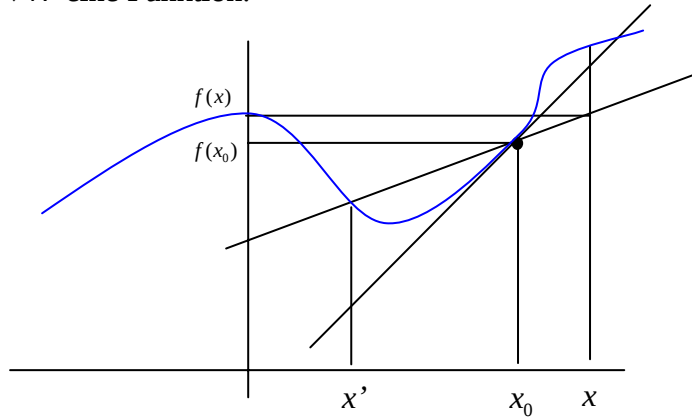
$$D =]a, b[$$

$]a, \infty)$ sind offen.

Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen. Jede offene Menge ist Vereinigung von offenen Intervallen.

Im folgenden sei D eine offene Menge oder ein Intervall.

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.



Problem: Man definiere die „Steigung“ des Graphen von f im Punkte x_0 .

Sei $x \in D$, $x \neq x_0$. Dann ist $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ die Steigung der Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

(8.4) Definition

Die Funktion f heißt **differenzierbar** in x_0 , wenn der Grenzwert $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0 \\ x \in D}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

Dann ist dieser Grenzwert die **Ableitung** von f an der Stelle x_0 . Man bezeichnet sie mit

$f'(x_0)$. (Andere Bezeichnung: $\frac{df}{dx}(x_0)$).

Die Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ mit Steigung $f'(x_0)$ heißt die **Tangente** an f im Punkte x_0 .

$$t_{f, x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Nach Definition, s.(6.3), ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn für jede Folge (a_n) in D mit $a_n \neq x_0 \quad \forall n$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0} \text{ existiert.}$$

Der Grenzwert (unabhängig von der Folge (a_n)) ist dann $f'(x_0)$.

(8.5) Satz

Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Beweis:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) &= f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \cdot f'(x_0) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x)$ konvergiert bei Annäherung von x gegen x_0 gegen $f(x_0)$

$\Rightarrow f$ ist stetig in x_0 , s. Übungsblatt 11,2 q.e.d.

(8.6) Beispiele

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= x \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \\ \Rightarrow f'(x_0) &= 1 \text{ für } x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x) &= x^2 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) &= 2x_0 = f'(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad f(x) &= e^x \quad \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \\ &= \frac{e^{x_0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}}{x - x_0} \\ &= e^{x_0} \cdot \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{k-1}}{k!} \right) \\ &= e^{x_0} \cdot \left(1 + (x-x_0) \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{k-2}}{k!} \right) \end{aligned}$$

die Reihe ist für alle x mit $|x - x_0| < \frac{1}{2}$ beschränkt durch 2.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}$$

$$\Rightarrow \exp'(x_0) = \exp(x_0)$$

$$(4) \quad f(x) = |x| \quad x_0 = 0$$

$$\frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ nicht differenzierbar in 0. Aber f ist stetig in 0.

(8.7) Satz

Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 . Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$(a) \quad (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(b) \quad (f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0) \quad \text{„Produktregel“}$$

Sei $g(x_0) \neq 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Als Funktion auf $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt:

$$(c) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad \text{„Quotientenregel“}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad \text{Durch Grenzübergang folgt (a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) + f(x) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{vgl. hierzu den Beweis zu 1.16 (b)}) \end{aligned}$$

Da g stetig ist in x_0 , folgt durch Grenzübergang $x \rightarrow x_0$ die Behauptung (b)

Sei nun $g(x_0) \neq 0$. Die erste Aussage folgt aus der Stetigkeit von g in x_0 .

Sei zunächst $f(x) = 1$, d.h. betrachte $\frac{1}{g(x)}$

Es gilt nun für $x \in D'$, $x \neq 0$

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}$$

Da g in x_0 stetig ist, existiert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \text{ und ist gleich } -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Aus (b) folgt hieraus der allgemeine Fall

q.e.d.

(8.8) Beispiel

Durch Induktion folgt aus (8.7)(b)

$$(x^n)'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1} \text{ für } n \geq 1;$$

ferner gilt für $x_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} (x^{-n})'(x_0) &= \left(\frac{1}{x^n} \right)'(x_0) \\ &= -\frac{n \cdot x_0^{n-1}}{x_0^{n-2}} = -\frac{n}{x_0^{n+1}} \\ &= (-n) \cdot x_0^{-n-1} \end{aligned}$$

(8.9) Satz

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 , sei $f(D) \subseteq D'$ und sei $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \text{„Kettenregel“}$$

Beweis:

Sei $D' \xrightarrow{g^*} \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g^*(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{falls } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{falls } y = y_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow g^*$ ist stetig in y_0 .

Es gilt nun für $x \neq x_0$

$$\frac{gf(x) - gf(x_0)}{x - x_0} = g^*(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dies ist klar, wenn $f(x) \neq f(x_0)$ ist.

Ist $f(x) = f(x_0)$ so steht auf beiden Seiten 0.

Da f in x_0 stetig, folgt die Behauptung durch Grenzübergang $x \rightarrow x_0$.

(8.10) Definition

Sei nun $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in jedem Punkt. Dann heißt die Funktion $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto f'(x_0)$ die **Ableitung** von f .

zum Beispiel gilt $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{Z}$

Ist f' ebenfalls differenzierbar, so heißt $f'' := (f')'$ die **2-te Ableitung** von f .

Ist die **n-te Ableitung** $f^{(n)}$ von f definiert und ist sie eine differenzierbare Funktion, so sei die $(n+1)$ -te Ableitung die Funktion $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Beispiel:

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot x^{n-k}$$

(= 0 falls $n \geq 0$ und $k > n$)

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

(8.11) Beispiele

$$(1) \quad (e^{x^2+1})' = e^{x^2+1} \cdot 2x$$

$$(2) \quad (e^{e^{x^2+1}})' = e^{e^{x^2+1}} \cdot e^{x^2+1} \cdot 2x$$

$$(3) \quad (a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot \log(a) = \log(a) \cdot a^x$$

$$(4) \quad f(x) = \sin x$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \frac{\sin((x - x_0) + x_0) - \sin x_0}{x - x_0} \\ &= \frac{\sin(x - x_0) \cdot \cos x_0 + \sin x_0 \cdot \cos(x - x_0) - \sin x_0}{(x - x_0)} &&= \text{Additionstheorem} \\ &= \frac{\cos x_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x - x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin x_0 \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (x - x_0)^{2k}}{(2k)!} - 1 \right)}{(x - x_0)} \\ &= \underbrace{\cos x_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x - x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\cos x_0} + \underbrace{\sin x_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (x - x_0)^{2k-1}}{(2k)!} \right)}_{\rightarrow 0} \\ &\Rightarrow \underline{(\sin x)' = \cos x} \end{aligned}$$

$$(5) f(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= \frac{\cos((x - x_0) + x_0) - \cos x_0}{x - x_0} \\ &= \frac{\cos(x - x_0) \cdot \cos x_0 - \sin(x - x_0) \cdot \sin x_0 - \cos x_0}{x - x_0} &&= \text{Additionstheorem} \\ &= \frac{\cos x_0 \cdot (\cos(x - x_0) - 1) - \sin x_0 \cdot \sin(x - x_0)}{x - x_0} \\ &\Rightarrow \underline{(\cos x)' = -\sin x} \end{aligned}$$

(8.12) Satz

Sei I ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und injektiv.

Sei $J = f(I)$ ($\Rightarrow J$ ist ein Intervall)

Sei $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0)$ und sei $f'(x_0) \neq 0$.

Dann ist $f^{-1} : J \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar in y_0 und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Beweis:

Sei $(y_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in J mit $y_n \neq y_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$

$$\Rightarrow \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} \longrightarrow ? \text{ konvergent?}$$

Sei $x_n = f^{-1}(y_n) \Rightarrow x_n \neq x_0$ und, da f^{-1} stetig ist, gilt $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$.

$$\text{Nun gilt } \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f'(x_0)}$$

wohldefiniert, da $f'(x_0) \neq 0$

q.e.d.

(8.13) Beispiele

$$(1) f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x \geq 0$$

$$f = g^{-1} \text{ für } g(x) = x^n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g' = n \cdot x^{n-1}, \text{ sei } n > 1$$

$$\text{Sei } y_0 > 0, \text{ Sei } x_0 = g^{-1}(y_0) = \sqrt[n]{y_0}$$

$$f'(y_0) = g^{-1}(y_0) = \frac{1}{n x_0^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{y_0})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\sqrt[n]{y_0})^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n} y_0^{(1/n)-1} \Rightarrow \left(x^{1/n} \right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{1/n-1}$$

$$(2) \quad f(x) = \log(x) \quad f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\log x)' = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

$$(3) \quad f(x) = \arcsin x: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \supset [-1, 1]$$

$$\text{Sei } x_0 \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin'(\arcsin x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$\text{da } \cos(\arcsin x) > 0 \text{ und daher } \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(4) \quad f(x) = \arccos x$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(8.14) Bemerkung

Differenziert man $f \circ f^{-1}(x) = x$, so erhält man aus (8.9)

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Dies ist **kein** Beweis von (8.13), da hier Differenzierbarkeit von f^{-1} schon vorausgesetzt wird!

Es ist aber eine Gedächtnisstütze.

(8.15) Satz

Sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergent für $x \in]-R, R[$. Dann ist f differenzierbar auf

$] -R, R[$ und es gilt:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}.$$

(ohne Beweis)

Wir zeigen nur

(8.16) Lemma

Für $x \in]-R, R[$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$ absolut konvergent.

Beweis:

Sei $x' \in]-R, R[$ mit $|x'| > |x|$, sei $q = \frac{|x|}{|x'|}$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k| |x|^{k-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k| |x'|^{k-1} \cdot q^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k| |x'|^{k-1} \cdot \left(\sqrt[k-1]{k} \cdot q \right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k-1]{k} = 1$, existiert ein k_0 : $\sqrt[k-1]{k} \cdot q \leq 1 \quad \forall k \geq k_0$.

$$\Rightarrow \forall k \geq k_0 : k \cdot |a_k| |x'|^{k-1} \leq |a_k| |x'|^{k-1}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |x'|^{k-1}$ ist konvergent.

$\Rightarrow$ Behauptung

q.e.d.