

§7 Folgen und Reihen stetiger Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf D .

(7.1) Definition

Die Folge (f_n) heißt **punktweise konvergent**, wenn für alle $x \in D$ gilt: $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.

In diesem Falle heißt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ der **Limes** (Grenzfunktion) der Folge (f_n) .

Bezeichnung:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ oder } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.w.} f$$

(7.2) Beispiel

Sei $D = [0,1]$

$f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x^n$

Sei $0 \leq x < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

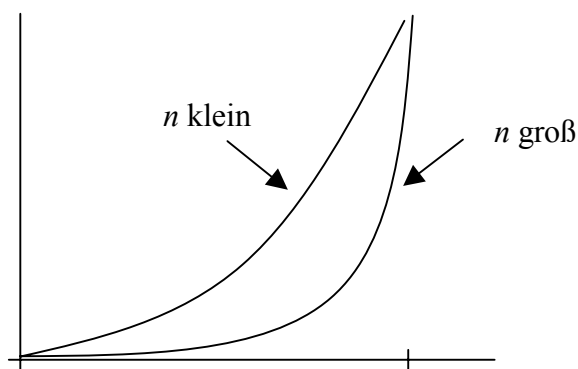
Sei $x = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$.

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.w.} f$ wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}.$$

Man sieht, dass f nicht stetig ist im Punkte $x = 1$, obwohl alle Funktionen f_n stetig sind.

Der punktweise Limes stetiger Funktionen ist i.A. nicht stetig.



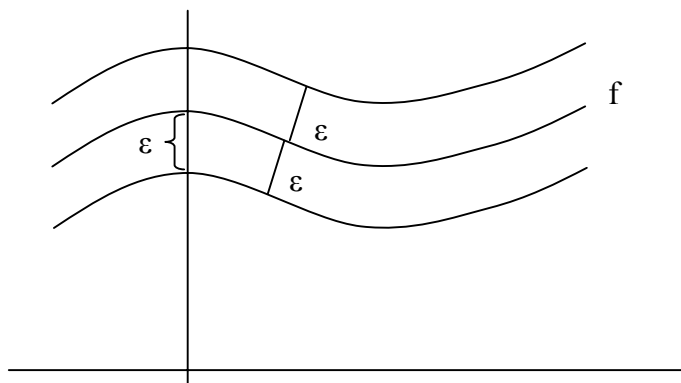
Für jedes (noch so große) n gibt es Punkte $x \in [0,1]$, die von $f(x) = 0$ noch weit entfernt sind.

(7.3) Definition

Sei $D \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Funktionen.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$



Für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ verläuft der Graph von f_n ganz innerhalb des „ ε -Schlauches“ um f , falls $n \geq n_0$.

(7.4) Satz

Sei $D \xrightarrow{f_n} \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert.

Dann ist f stetig.

Beweis:

Sei $x_0 \in D$ und sei $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = x_0$.

zu zeigen: $\lim_{m \rightarrow \infty} f(a_m) = f(x_0)$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0. \quad \exists n_0 : \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D : |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left(\Rightarrow |f(a_m) - f_n(a_m)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall m \quad \forall n \geq n_0 \right)$$

Da f_{n_0} stetig, gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_0}(a_m) = f_{n_0}(x_0)$

$$\Rightarrow \exists m_0 : \quad \forall m \geq m_0 : |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(a_m)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \forall m \geq m_0 : |f(x_0) - f(a_m)|$$

$$\leq |f(x_0) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(a_m)| + |f_{n_0}(a_m) - f(a_m)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ stetig in x_0

$\Rightarrow$ Behauptung

q.e.d.

Reihen von Funktionen

Sei $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen

(7.5) Definition

Die **Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ist die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=0}^n f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Reihe heißt **punktweise**

(absolut) konvergent, wenn für jedes $x \in D$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ (absolut) konvergiert. Die

Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ wird mit $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ bezeichnet.

Die Reihe heißt **gleichmäßig konvergent** (gegen die Funktion f), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D : \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| < \varepsilon$$

(7.6) Satz

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent. Sind alle f_n stetig, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ stetig.

Beweis:

Dies folgt aus (7.4)

(7.7) Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall n > m \geq n_0 \quad \forall x \in D : \quad \left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| < \varepsilon$

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Es gelte $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

für $\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D$

$\Rightarrow \forall n > m \geq n_0 \quad \forall x \in D :$

$$\left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| \leq \left| f(x) - \sum_{k=0}^m f_k(x) \right| + \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Nach dem Cauchy-Kriterium (1.22) konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ punktweise gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq n_0 \quad \forall x \in D : \left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für jedes

$x \in D$ gilt dann nach Grenzübergang $n \rightarrow \infty$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ d.h. } \forall x \in D : \forall m \geq n_0 : \left| f(x) - \sum_{k=0}^m f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \text{q.e.d.}$$

(7.8) Definition

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ heißt eine **Potenzreihe**.

Beispiele: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, Polynome

Im Allgemeinen sind Potenzreihen nicht konvergent, siehe geometrische Reihe für $|x| \geq 1$.

(7.9) Satz

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$ derart, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x_0^k$ konvergiert.

Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ absolut und gleichmäßig auf jedem Intervall $[-x_1, x_1]$ für $0 < x_1 < |x_0|$. Folglich ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ eine stetige Funktion auf $] -|x_0|, |x_0| [$.

Beweis:

Die Folge $(a_n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt. Sei $|a_n x_0^n| \leq M$ für alle n .

Sei $0 < x_1 < |x_0|$, sei $q = \frac{x_1}{|x_0|} < 1$

Dann gilt für $|x| \leq x_1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k \cdot x^k| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x_1|^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x_0|^k \cdot \frac{x_1^k}{|x_0|^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} M \cdot q^k = \frac{M}{1-q} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $q^{n_0} < \frac{1-q}{M} \cdot \varepsilon$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ $\forall x: |x| \leq x_1$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k \right| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^k \\ &\leq q^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} M \cdot q^k \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ die Reihe konvergiert gleichmäßig auf $[-x_1, x_1]$.

Sei nun $x_2 < |x_0|$. Wähle x_1 mit $x_2 < x_1 < |x_0|$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist stetig auf $[-x_1, x_1]$

$\Rightarrow f(x)$ ist stetig in x_2

$\Rightarrow f$ ist stetig auf $] -|x_0|, |x_0| [$

q.e.d.

(7.10) Beispiele

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{n}$ ist für $x = -1$ konvergent

$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{n}$ ist eine stetige Funktion auf $] -1, 1 [$

(2) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$ ist eine stetige Funktion auf $] -1, 1 [$.

Es gilt $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. Die rechte Seite ist für $x \neq 1$ definiert!

Anhang: Komplexe Zahlen

(7.11) Definition

Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt **konvergent** gegen $z \in \mathbb{C}$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 : \quad |z - z_n| < \varepsilon .$$

(7.12) Lemma

Äquivalent sind:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z)$$

$$\text{und } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im} z .$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_n)| &\leq |z - z_n| \\ &\leq |\operatorname{Re}(z - z_n)| + |\operatorname{Im}(z - z_n)|, \end{aligned}$$

ebenso für $\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z_n)$.

Hieraus folgt die Behauptung. q.e.d.

Die Begriffe und Sätze aus §2 - §6 übertragen sich sinngemäß. z.B.

- $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $M > 0$ gibt mit $|z_n| < M$ für alle n .
- Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungspunkt.
- Jede Cauchy-Folge ist konvergent.
- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergiert.
- Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ heißt **stetig** in $z_0 \in D$, wenn für jede Folge $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$ in D , die Folge $f(z_n)$ gegen $f(z_0)$ konvergiert.

Für Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ gilt:

(7.13) Satz

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^k$ eine Potenzreihe, die für $z = z_0 \neq 0$ konvergent sei. Dann konvergiert diese

Reihe für jedes $0 < r < |z_0|$ absolut und gleichmäßig auf dem Kreis $\overline{D_r} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

Sie definiert eine stetige Funktion auf $\overline{D_{|z_0|}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |z_0|\}$.

(7.14) Beispiel

$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist eine stetige Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

Es gilt $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$

Betrachte nun $\exp$ entlang der imaginären Achse:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{e^{ix}} \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \cdot x^k}{k!}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{(e^{ix})} &= \overline{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!} \right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k x^k}{k!} \\ &= e^{-ix} \end{aligned}$$

Daher ist $|e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\ \operatorname{Im} e^{ix} &= \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

(7.15) Definition

Die Funktion

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \text{ heißt } \underline{\text{Kosinus}}.$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ heißt } \underline{\text{Sinus}}.$$

Es gilt also

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

und daher

$$1 := |e^{ix}|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Weiter folgt aus $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$:

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned}$$

Also gilt

(7.16) Additionstheorem für sin, cos

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

(7.17) Eigenschaften von sin, cos

Es gilt

- (a) $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$
 - (b) $\cos 0 = 1, \cos(-x) = \cos x$
 - (c) $\sin 0 = 0, \sin(-x) = -\sin x$
- (folgt aus Potenzreihen)

Sei $x_0 = 2$. Die Folge $\frac{x_0^{2k}}{(2k)!}$ ist monoton fallend für $k \geq 1$, da

$$\frac{x_0^{2k+2}}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{x_0^{2k}} = \frac{4}{(2k+1)(2k+2)} < 1$$

$$\begin{aligned} \text{Daher gilt } \cos x_0 &\leq 1 - \frac{x_0^2}{2!} + \frac{x_0^4}{4!} \\ &= 1 - 2 + \frac{16}{24} < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \cos(x)$ hat in $[0, 2]$ eine Nullstelle.

Ebenso gilt für $0 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned} \text{(d) } \sin x_0 &\geq x_0 - \frac{x_0^3}{6} = x_0 \cdot \left(1 - \frac{x_0^2}{6}\right) \\ &\geq \frac{x_0}{3} \end{aligned}$$

Sei $M = \{y \in [0, 2] : \cos y = 0\}$ und $y_0 := \inf M$.

$\Rightarrow y_0 \in M$, oder es gibt eine Folge $(y_n)_{n \geq 1}$ in M mit Limes y_0 . Da $\cos y_n = 0$, folgt $\cos y_0 = 0$, also $y_0 \in M$.

(7.18) Definition

$$\pi := 2y_0$$

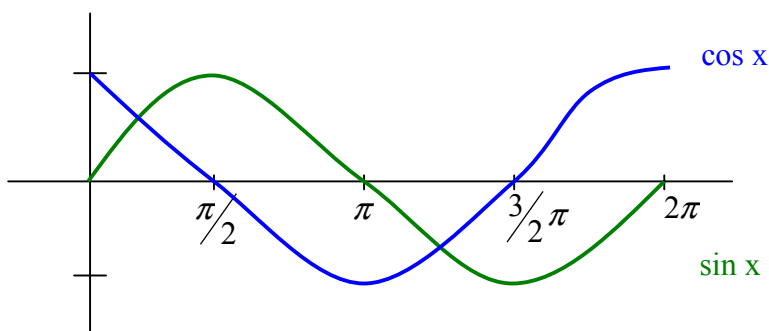
$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 & \Rightarrow_{\sin x \geq 0} & \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ & \Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 & \Rightarrow_{(a)} & \text{Bild}(\sin) = [-1, 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad & \Rightarrow_{(7.16)} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x \\ & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(g)} \quad & \Rightarrow \cos(x + \pi) = -\cos x \\ & \sin(x + \pi) = -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(h)} \quad & \Rightarrow \cos(x + 2\pi) = \cos x \\ & \sin(x + 2\pi) = \sin x \end{aligned}$$

Also sind $\cos$ und $\sin$ 2π -periodische Funktionen.



$\sin$ und $\cos$ sind durch

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ definiert.

Das Additionstheorem (7.16) gilt für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (ohne Beweis)

$$\text{Sei } 0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos y &= \cos(x + y - x) \\ &= \cos x \cos(y - x) - \sin x \sin(y - x) \\ &< \cos x \cos(y - x) < \cos x \end{aligned}$$

$\Rightarrow \cos$ ist streng monoton fallend auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ und wegen $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, s. (g)

und (b), auch auf $[0, \pi]$.

$\Rightarrow \sin$ streng monoton steigend auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\Rightarrow \cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ sind bijektiv.

Die Umkehrfunktionen heißen arccos und arcsin.

$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$