

§6 Stetige Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in D$.

(6.1) Definition

Die Funktion f heißt **stetig** in x_0 , wenn für **jede** Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = x_0$ gilt:

$(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $f(x_0)$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n)) = f(x_0)$.

Wir schreiben dann auch $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} f(x) = f(x_0)$.

f heißt stetig, wenn f **stetig** ist in jedem Punkt $x_0 \in D$.

Stetigkeit in x_0 bedeutet also:

Strebt x gegen x_0 , so strebt $f(x)$ gegen $f(x_0)$.

(6.2) Beispiele

(1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x$

f ist stetig; Sei $x_0 \in D$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = x_0$

$\Rightarrow (f(a_n))_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x_0

$\Rightarrow f$ stetig in x_0 , da x_0 beliebig war, ist f stetig

(2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$, sei $x_0 \in \mathbb{R}$

Nun gilt $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}} = (a_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$

Diese konvergiert gegen $x_0^2 = f(x_0)$

(3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \exp(x) = e^x$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = x_0$

Konvergiert e^{a_n} gegen e^{x_0} ?

Betrachte $|e^{a_n} - e^{x_0}| = |e^{x_0}| \cdot |e^{a_n - x_0} - 1|$

Es gilt dann für $|a_n - x_0| \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
|e^{a_n} - e^{x_0}| &= |e^{x_0}| \cdot \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_n - x_0)^k}{k!} \right| \\
&\leq |e^{x_0}| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(a_n - x_0)|^k}{k!} \\
&\leq |e^{x_0}| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_n - x_0|^k \\
&= \frac{e^{x_0}}{1 - |a_n - x_0|} \cdot |a_n - x_0| \\
&\leq 2e^{x_0} \cdot |a_n - x_0|
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n - x_0| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2e^{x_0}}, \frac{1}{2}\right)$

Dann gilt für alle $n \geq n_0 : |e^{a_n} - e^{x_0}| < \varepsilon$, also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^{x_0}$

(4) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Sei $x_0 \in D$, sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = x_0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{x_0}$$

$\Rightarrow f$ ist stetig in x_0

(5) Sei $D = \mathbb{R}$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Sei $x_0 = 0$

$$\text{Sei } (a_n) = \left(-\frac{1}{n} \right) \Rightarrow f(a_n) = -1 \quad \forall n$$

konvergiert, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq f(x_0)$

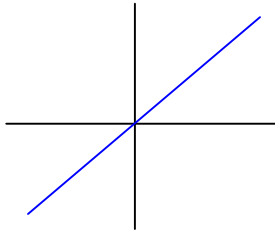
$\Rightarrow f$ nicht stetig in x_0

$$\text{Sei } (a_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n} \right), \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$\Rightarrow f(a_n)$ konvergiert nicht !

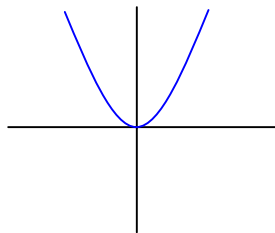
Bilder der Beispiele:

(1)



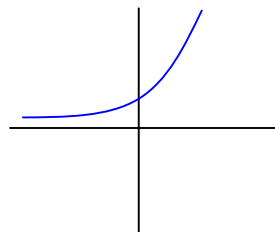
$$f(x) = x$$

(2)



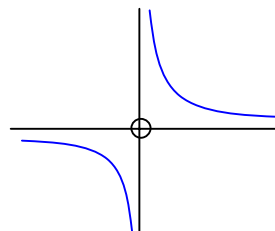
$$f(x) = x^2$$

(3)



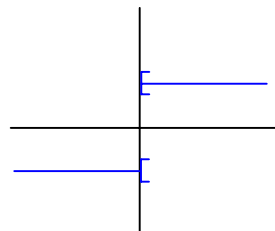
$$f(x) = e^x$$

(4)



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

(5)



$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

(6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{ist nirgends stetig}$$

(7) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{ist stetig in 0, nicht stetig sonst.}$$

(8) $D = \{x \in \mathbb{R} : \{x < -1\} \cup \{0\} \cup \{x > 1\}\}$

$$\text{—————} [\quad \circ \quad] \text{—————}$$

0

Jede Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in 0.

Sei (a_n) eine Folge in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(0)$$

(9) $D = \{x : x \geq 0\}$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Sei $x_0 > 0$ und (a_n) Folge in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = x_0$.

Ist $x_0 > 0$, so gilt:

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(a_n)| &= |\sqrt{x_0} - \sqrt{a_n}| \\ &= \frac{|x_0 - a_n|}{\sqrt{x_0} + \sqrt{a_n}} \\ &\leq \frac{|x_0 - a_n|}{\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \text{ stetig in } x_0$$

Ist $x_0 \leq 0$ und $\varepsilon > 0$, so gilt $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : 0 \leq a_n < \varepsilon^2$

$$\Rightarrow \sqrt{a_n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = 0$$

$$\Rightarrow f \text{ stetig in } 0$$

$$\Rightarrow f \text{ stetig}$$

Grenzprozesse bei Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D existiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = x_0$.

(Bsp: $D =]0,1[$, $a_n = \frac{1}{n}$)

(6.3) Definition

$f(x)$ **konvergiert gegen** $A \in \mathbb{R}$ bei Annäherung von x an x_0 .

$\Leftrightarrow$ Für jede Folge (a_n) in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$

Man schreibt dann $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} f(x) = A$

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f(x) = 2$$

Sei D nicht nach oben beschränkt

Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ($-\infty$)

falls $\forall C \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n > C$

bzw. $\forall C \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n < C$

Sei $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Man definiert

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall (a_n) \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall (a_n) \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \infty$ Ebenso für $-\infty$

(6.4) Satz

Seien $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ und $D \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$.

Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ stetig in x_0 .

Sei $g(x_0) \neq 0$, sei $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Dann ist $\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 .

Beweis:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$

$$\Rightarrow f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0) \text{ und } g(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x_0)$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(1.16)(a)}{\Rightarrow} (f+g)(a_n) &= f(a_n) + g(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0) + g(x_0) \\ &= (f+g)(x_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f+g \text{ stetig in } x_0$$

Ebenso $f \cdot g$ stetig in x_0 , s. (1.16) (b)

und $\frac{f}{g}$ stetig in x_0 , s. (1.16) (c)

(6.5) Satz

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 , sei $E \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ (dann induziert f eine Abbildung $D \xrightarrow{f} E$).

Sei $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $y_0 = f(x_0)$.

Dann ist $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 .

Beweis:

Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, $a_n \in D$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0) = y_0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(a_n)) = g(y_0) = g(f(x_0))$$

$$\Rightarrow \text{Behauptung} \quad \text{q.e.d.}$$

(6.6) Beispiele

(1) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sqrt[3]{\exp(1+x^2-\sqrt{x})}$$

$$\Rightarrow f = f_1 \circ f_2 \circ f_3, \text{ wobei}$$

$$f_3(x) = 1 + x^2 - \sqrt{x}$$

$$f_2(x) = \exp(x)$$

$$f_1(x) = \sqrt[3]{x}$$

alle sind stetig $\Rightarrow f$ stetig

(2) Eine Funktion $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ der Form $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ heißt eine **Polynomfunktion** (oder

kürzer ein **Polynom**)

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der **Grad** von f .

Summen und Produkte von Polynomen sind Polynome, und es gilt

$$\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g).$$

(6.4) $\Rightarrow$ Polynome sind stetig.

(3) Eine Funktion $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p, q Polynome sind heißt eine

rationale Funktion. Hierbei ist $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Rationale Funktionen sind stetig.

Definiert man eine Funktion mittels Fallunterscheidung, so entstehen leicht nicht stetige Funktionen!

Ein **Intervall** ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ der Form

$$[a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[, [a, a] = \{a\}$$

$$]-\infty, b],]-\infty, b[, [a, \infty[,]a, \infty[, \mathbb{R}$$

Ein Intervall der Form $[a, b]$ heißt **kompakt**.

(6.7) Zwischenwertsatz

Sei I ein Intervall, sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, seien $a < b$ in I , und sei $f(a) \neq f(b)$.

Dann existiert zu jedem y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein x zwischen a und b mit $f(x) = y$.

Beweis:

Sei $f(a) < f(b)$

Definiere Folgen (a_n) und (b_n) in I mit

- (i) (a_n) monoton steigend
 (b_n) monoton fallend
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (iii) $f(a_n) \leq y < f(b_n) \quad \forall n$

Sei $a_0 = a, \quad b_0 = b$

Seien a_n, b_n konstruiert. Sei $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Setze

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{falls } f(c_{n+1}) > y \\ c_{n+1} & \text{falls } f(c_{n+1}) \leq y \end{cases} \quad b_{n+1} = \begin{cases} c_{n+1} & \text{falls } f(c_{n+1}) > y \\ b_n & \text{falls } f(c_{n+1}) \leq y \end{cases}$$

Sei $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq y$$

$$\text{und } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq y$$

Also gilt $f(x) = y$

Der Fall $f(a) > f(b)$ geht analog, oder man ersetzt f durch $-f$ und y durch $-y$.

(6.8) Korollar

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Falls $f(x) \neq a$ für alle x , so gilt

$f(x) > a$ für alle x

oder $f(x) < a$ für alle x .

(6.9) Korollar

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\text{Bild}(f) = f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Beweis:

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn gilt:

Sind $u, v \in D$, ist $u \leq v$, und ist $u \leq y \leq v$, so ist auch $y \in D$.

Seien $u = f(a)$, $v = f(b)$ in $f(I)$, sei $a < b$ und o.E. $u \leq v$ (sonst betrachte $-f$)

Nach (6.7) gehört jedes y zwischen u und v zum Bild von f

$\Rightarrow$ Behauptung

q.e.d.

(6.10) Beispiele

(1) Sei $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

$f(0) < 0$, $f(1) > 0$

$\Rightarrow \exists x_0 : 0 < x_0 < 1 : f(x_0) = 0$

(2) Sei $f(x) = x^2$ $I =]-1, 1[$

$\Rightarrow f(I) = [0, 1[$

(3) Sei $f(x) = \frac{1}{x}$ $I =]0, 1[$

$\Rightarrow f(I) =]1, \infty[$

(6.11) Satz

Sei I ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Dann ist f streng monoton.

Beweis:

Sei zunächst $I = [a, b]$ kompakt und sei $f(a) < f(b)$.

Behauptung 1: $f(I) = [f(a), f(b)]$

Nach (6.7) gilt $f(I) \supseteq [f(a), f(b)]$.

Wäre $f(x) < f(a)$ für ein x mit $a < x < b$, so gäbe es nach (6.7) ein y mit $x < y < b$ und $f(y) = f(a)$ ✗

Ebenso ist $f(x) > b$ nicht möglich.

$\Rightarrow$ Behauptung 1

Sei nun $a \leq x < y \leq b$

Es gilt nach Behauptung 1 $f(a) \leq f(x) < f(b)$.

Wende nun Behauptung 1 auf $[x, b]$ an

$\Rightarrow f(x) < f(y) \leq f(b)$.

$\Rightarrow f$ streng monoton steigend

Im Fall $f(a) > f(b)$ ist $-f$ streng monoton fallend.

Sei nun I ein beliebiges Intervall,

Seien $x_0 < x_1$ in I mit $f(x_0) < f(x_1)$.

Sei nun $x < y$ in I .

Sei $a = \min(x_0, x)$, $b = \max(x_1, y)$

$\Rightarrow [a, b] \subseteq I$ $x_0, x, x_1, y \in [a, b]$

Nach obigem ist $f|_{[a,b]}$ streng monoton und wegen $f(x_0) < f(x_1)$ streng monoton steigend.

$\Rightarrow f(x) < f(y)$. Da x, y beliebig waren, ist f streng monoton steigend.

q.e.d.

(6.12) Satz

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Sei $J = f(I)$

Dann ist $f : I \rightarrow J$ bijektiv.

Betrachte $f^{-1} : J \rightarrow I$ als Abbildung von J nach $\mathbb{R}$. Dann ist f^{-1} stetig.

Beweis:

Sei $y_0 \in J$ und sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in J mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y_0$.

(6.11) $\Rightarrow f$ ist streng monoton

$\Rightarrow f^{-1}$ ist streng monoton

Es gibt $u < v \in J$: $b_n \in [u, v]$ für alle n

$\Rightarrow \forall n: f^{-1}(u) \leq f^{-1}(b_n) \leq f^{-1}(v)$ falls f monoton steigend

bzw. $f^{-1}(v) \leq f^{-1}(b_n) \leq f^{-1}(u)$ falls f monoton fallend.

$\Rightarrow (f^{-1}(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt

$\Rightarrow$ Sie hat einen H.P. B

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $N \subseteq \mathbb{N}$ geeignet derart, dass $(f^{-1}(b_n))_{n \in N}$ gegen B konvergiert

Da f stetig ist, konvergiert $(f(f^{-1}(b_n)))_{n \in N} = (b_n)_{n \in N}$ gegen $f(B)$.

$\Rightarrow y_0 = f(B)$

Hätte $(f^{-1}(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ einen weiteren H.P. C , so wäre nach dem selben Schluss $f(C) = y_0$ $\nearrow$
 $\Rightarrow (f^{-1}(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Limes B und $f(B) = y_0$.
 $\Rightarrow B = f^{-1}(y_0) \quad \Rightarrow f^{-1}$ stetig in y_0 q.e.d.

(6.13) Beispiel: Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\exp} \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp(x) = e^x \end{aligned}$$

- (1) $e^x > 0$ für alle x ,
- (2) $\exp$ ist streng monoton steigend
- (3) $\text{Bild}(\exp) = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$

Sei $x \geq 0$. Aus $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ folgt $e^x > 0$.

Für $x < 0$ gilt $(e^x)^{-1} = e^{-x} > 0 \Rightarrow e^x > 0$

Sei $x < y$.

$$\Rightarrow e^y = e^x \cdot e^{y-x}$$

$$y - x > 0 \Rightarrow e^{y-x} > 1 + (y - x) > 1$$

$$\Rightarrow e^x < e^y, \text{ da } e^x > 0$$

Sei $z > 0$. Falls $z \geq 1$, so gilt $1 = e^0 \leq z \leq e^z = 1 + z + \dots$

$$(6.7) \Rightarrow \exists x: 0 \leq x < z: e^x = z$$

$$\Rightarrow z \in \text{Bild}(\exp).$$

$$\text{Falls } 0 < z < 1 \Rightarrow \frac{1}{z} > 1 \Rightarrow \exists x: e^x = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow e^{-x} = z$$

$$\Rightarrow z \in \text{Bild}(\exp)$$

Also ist $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x: x > 0\}$ bijektiv.

(6.14) Definition

Die Umkehrfunktion von $\exp$ heißt der (natürliche) **Logarithmus**.

$$\log: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

(6.12) $\Rightarrow \log$ ist stetig.

(6.15) Eigenschaften von $\log$

$$(1) e^0 = 1 \quad \Rightarrow \log(1) = 0$$

$$e^1 = e \quad \Rightarrow \log e = 1$$

$$(2) \quad e^{\log(x)} = x \quad \text{für } x > 0$$

$$\log e^x = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$(3) \quad \text{Seien } u, v > 0 \Rightarrow u = e^{\log(u)}, v = e^{\log(v)}$$

$$e^{\log(u)} \cdot e^{\log(v)} = u \cdot v = e^{\log(u) + \log(v)}$$

$$\Rightarrow \log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v)$$

Insbesondere gilt: $\log(u^n) = n \cdot \log(u)$, $n \in \mathbb{N}$

$$\log(u^{-n} \cdot u^n) = \log(u^{-n}) + \log(u^n) = \log(u^{-n}) + n \cdot \log(u)$$

$$\Rightarrow \log(u^{-n}) = -n \cdot \log(u), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\log\left(\frac{1}{u}\right) = -\log(u)$$

$$(4) \quad \text{Sei } a > 0$$

$$\Rightarrow a = e^{\log a} \quad \text{und} \quad a^n = (e^{\log a})^n = e^{n \cdot \log a} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Definiere die **Exponentialfunktion** zur Basis a als:

$$a^x := e^{x \cdot \log a}$$

Dann gilt:

$$a^x > 0, \text{ monoton steigend } a > 1$$

$$a^x > 0, \text{ monoton fallend } a < 1$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y},$$

$$\begin{aligned} \text{da } (a^x)^y &= e^{y \cdot \log a^x} \\ &= e^{y \cdot \log(e^{\log(a) \cdot x})} \\ &= e^{y \cdot x \cdot \log a} = a^{xy} \end{aligned}$$

(6.16) Satz

Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist $f(I)$ ein kompaktes Intervall. Insbesondere nimmt f ein Maximum und ein Minimum an.

Beweis:

Ist f konstant, so ist $f(I) = [f(a), f(a)]$. Sei f nicht konstant.

Nach (6.9) ist $J = f(I)$ ein Intervall. Wäre J nicht beschränkt, so gäbe es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I derart, dass $f(a_n)$ gegen ∞ oder $-\infty$ strebt, s. (6.3)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, hat daher einen H.P. A in $\mathbb{R}$

Es gibt eine Teilfolge $(a_n)_{n \in N}$ mit $\lim_{n \in N} a_n = A$.

Da $a \leq a_n \leq b$ für alle $n \in N$ gilt: $a \leq A \leq b$, d.h. $A \in I$.

Also gilt $\lim_{n \in N} f(a_n) = f(A)$

$\Rightarrow (f(a_n))_{n \in N}$ ist beschränkt

✗

da $\lim_{n \in N} f(a_n) = \infty$ oder $-\infty$

$\Rightarrow \exists u < v:]u, v[\subseteq J \subseteq [u, v]$

Sei (b_n) eine Folge in $]u, v[$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = u$.

Sei $a_n \in I: f(a_n) = b_n$ (geht, da $]u, v[\subseteq f(I)$)

Die Folge (a_n) hat einen H.P. $A \in I$, und eine Teilfolge $(a_n)_{n \in N}$ konvergiert gegen A .

Da f stetig ist, gilt $f(A) = \lim_{n \in N} f(a_n) = u$.

Ebenso existiert $B \in I: f(B) = v$.

$\Rightarrow$ Behauptung

q.e.d.

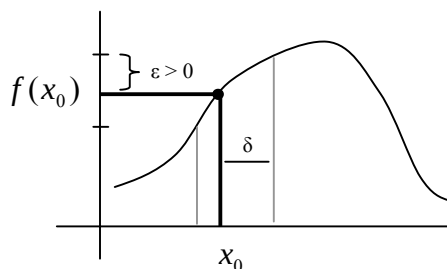
(6.17) Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist stetig in x_0

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: |x - x_0| < \delta: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$



Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2)

Angenommen, die Aussage ist falsch

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D: |x - x_0| < \delta: |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Sei $a_n \in D$ mit $|a_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und

$|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, wobei $n \in \mathbb{N}_+$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ aber $(f(a_n))$ kann nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren

✗ zur Stetigkeit

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, $a_n \in D$.

Sei $\varepsilon > 0$ und δ wie in (2).

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow f \text{ stetig in } x_0$$

q.e.d.

Bemerkung:

Kriterium (2) findet man häufig als Definition für Stetigkeit.