

§5 Umordnung von Reihen und Mehrfachreihen

(5.1) Beispiel

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ ist eine konvergente Reihe (Leibnizkriterium)

Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2k} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sind nicht beschränkt und daher nicht konvergent.

Es gibt eine Folge $1 = N_1 < N_2 < N_3 < \dots$ natürlicher Zahlen so, dass $\sum_{k=N_j+1}^{N_{j+1}} \frac{1}{2k-1} \geq 2$

Betrachte die Folge $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2N_2-1}, -\frac{1}{2},$
 $\frac{1}{2N_2+1}, \frac{1}{2N_2+3}, \dots, \frac{1}{2N_3-1}, -\frac{1}{4},$
 $\frac{1}{2N_3+1}, \dots = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Die Folge (a_n) enthält dieselben Zahlen wie die Folge $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots\right)$, jede Zahl kommt genau einmal vor.

Da $\left(\sum_{k=N_j+1}^{N_{j+1}} a_k\right) - \frac{1}{2j} \geq 1$ gilt $\sum_{k=1}^{N_j+j-1} a_k \geq j-1$

$\Rightarrow$ Die Folge der Partialsummen ist nicht beschränkt

Aus konvergenten Reihen können durch Umordnung der zugehörigen Folgen divergente Reihen entstehen!

(5.2) Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und sei $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung.

Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{\sigma(n)}$ heißt **Umordnung** der Folge (a_n) .

Beispiel (5.1) zeigt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent sein kann während $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergiert.

(5.3) Satz

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Umordnung von (a_n) , etwa $b_n = a_{\sigma(n)}$, $\sigma: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij.}} \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

(5.4) Satz

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

Sei $\mathbb{N} = \bigcup_{r=0}^{\infty} N_r$ eine Partition, d.h. $N_r \cap N_s = \emptyset$, falls $r \neq s$. Dann gilt

(1) Die Reihe $\sum_{k \in N_r} a_k$ ist absolut konvergent (falls N_r unendlich ist).

$$\text{Sei } A_r = \sum_{k \in N_r} a_k$$

(2) Die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} A_r$ ist absolut konvergent und $\sum_{r=0}^{\infty} A_r = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in N_r} a_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

(5.5) Definition

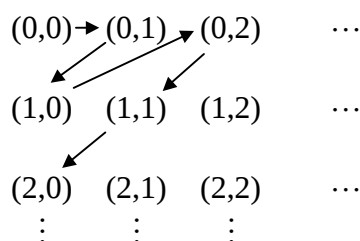
Eine Familie $(a_{nm})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ heißt eine **Doppelfolge**.

$$\begin{array}{l} a_{00}, a_{01} \cdots a_{0n} \cdots \\ a_{10}, a_{11}, \cdots \\ \vdots \end{array}$$

(5.6) Lemma

Es gibt eine bijektive Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$.

Beweis:



Sei $\sigma(0) = (0,0)$. Sei $\sigma(k)$ definiert und $\sigma(k) = (m,n)$
 $\sigma(k+1) = (m+1, n-1)$ falls $n > 0$, $\sigma(k+1) = (0, n+m+1)$ falls $n = 0$
 $\Rightarrow \sigma$ ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}^2$

Sei M eine Menge. Eine bijektive Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow M$ heißt eine **Abzählung** von M .
 Die Abzählung von $\mathbb{N}^2$ im Beweis von (5.6) heißt auch **Cauchy-Abzählung**.

Sei nun $(a_{nm})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ eine Doppelfolge und sei $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ eine Abzählung.

Die Folge $(b_r)_{r \in \mathbb{N}}$ heißt die (einfache) Folge zu (a_{nm}) zur Abzählung σ .

$$b_0 = a_{\sigma(0)} \quad , \quad b_1 = a_{\sigma(1)}, \dots$$

Sei $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ eine weitere Abzählung

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N}^2 \xleftarrow{\tau} \mathbb{N}$$

$$(b_r)_{r \in \mathbb{N}} \quad (a_{nm}) \quad (c_r)_{r \in \mathbb{N}}$$

$$c_r = a_{\tau(r)} = b_{\sigma^{-1}(\tau(r))}$$

$$\sigma^{-1} \circ \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad , \quad c_r = b_{\sigma^{-1}(\tau(r))}$$

$\Rightarrow (c_r)$ ist Umordnung von (b_r)

(5.7) Satz

Es existiere eine Konstante $C > 0$ derart, dass $\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m |a_{kl}| \leq C$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Sei $(b_r)_{r \in \mathbb{N}}$ wie oben.

(1) Die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} b_r$ ist absolut konvergent und die Summe ist unabhängig von der Abzählung σ .

(2) Für festes m ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{km}$ absolut konvergent und für festes n ist $\sum_{l=0}^{\infty} a_{nl}$ absolut konvergent.

(3) Sei $B = \sum_{r=0}^{\infty} b_r$. Dann gilt

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} \right)$$

Produkte von Reihen

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ Reihen

$$(c_{nm})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \quad c_{nm} = a_n \cdot b_m$$

(5.8) Satz

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ absolut konvergent. Dann ist $\sum_{k,l} a_k b_l$ eine absolut konvergente

Doppelreihe, d.h. $\exists C : \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m |a_k b_l| \leq C \quad \forall n, m$ und es gilt

$$\sum_{k,l} a_k b_l = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \right)$$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m |a_k b_l| = \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^m |b_l| \right) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l| \right)$$

(5.9) Korollar

Sei $d_k = \sum_{r=0}^k a_r \cdot b_{k-r}$

Dann gilt $\sum_{k=0}^{\infty} d_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^k a_r b_{k-r} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l$

(5.10) Beispiel

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!} = \exp(y)$$

$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^k \frac{x^r}{r!} \cdot \frac{y^{k-r}}{(k-r)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{r=0}^k \frac{k!}{r!(k-r)!} x^r \cdot y^{k-r} \right) \end{aligned}$$

Binomialtheorem $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = \exp(x+y)$

Also gilt:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$$

Sei $e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Rightarrow \exp(n) = \exp(1+\dots+1) = e^n$

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x+(-x)) = \exp(0) = 1 \Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(n) = e^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Es gilt auch $\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{e^m} = e^{\frac{m}{n}}$

Definiere $e^x := \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$