

§3 Reihen

Sei $(a_n)_{(n)}$

(3.1) Definition

Die Folge $b_n := \sum_{k=0}^n a_k$ heißt die unendliche Reihe der a_n .

$$(b_n)_{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \text{ z.B. } \sum_{k=0}^{\infty} k = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)_{(n)}$$

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so heißt die Reihe **konvergent**, andernfalls **divergent**.

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so wird der Limes auch mit $\sum_{k=0}^n a_k$ bezeichnet.

Dieser heißt die **Summe** der Reihe.

Die Folge $(a_n)_{(n)}$ heißt dann **summierbar**.

b_n heißt die n-te **Partialsumme**.

Jede Folge $(a_n)_{(n)}$ kann als Reihe geschrieben werden.

$$c_0 := a_0, c_n = a_n - a_{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

$$c_0 + c_1 = a_0 + a_1 - a_0 = a_1$$

$$c_0 + c_1 + c_2 = a_1 + a_2 - a_1 = a_2$$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent mit Summe a

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \left| a - \sum_{k=0}^n a_k \right| < \varepsilon$$

$$\text{d.h. } \left| a - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

(3.2) Cauchy-Kriterium

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n_0 \leq n \leq m : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$

Beweis: (1.21) für Partialsummen

(3.3) Korollar

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, d.h. $(a_n)_{(n)}$ ist Null-Folge.

Beweis:

$$(3.2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0$$

$$\left| \sum_{k=n}^n a_k \right| = |a_n| < \varepsilon \quad \Rightarrow \text{Behauptung}$$

! Die Umkehrung gilt nicht !

(3.4) Beispiele

(1) „geometrische Reihe“

Sei $q \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, Partialsumme: $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $q \neq 1$

Ist $|q| \geq 1 \Rightarrow |q^k| \geq 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist divergent

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$ für $|q| < 1$, gilt:

Falls $|q| < 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

insbesondere ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergent $\forall |q| < 1$

(2) „harmonische Reihe“

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ ist divergent

Betrachte $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} =: b_{2^n}$ $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^n} \quad \forall 1 \leq k \leq 2^n$

$$= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{k} + \underbrace{\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k}}_{2^{n-1} \text{ Summanden}} \geq \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{k} + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \Rightarrow \text{Folge der Partialsumme ist nicht beschränkt}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ ist divergent}$$

(3.5) Satz

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k$ konvergent und es gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Beweis:

Es gilt $\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k$

Bilde $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{siehe (1.16)}$$

Bemerkung:

(3.5) besagt, dass die summierbaren Folgen einen Untervektorraum im Vektorraum aller Folgen sind.

Konvergenzkriterien:

Eine Folge $(a_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ heißt alternierend, wenn die a_n abwechselndes Vorzeichen haben.

(3.6) Leibnizkriterium

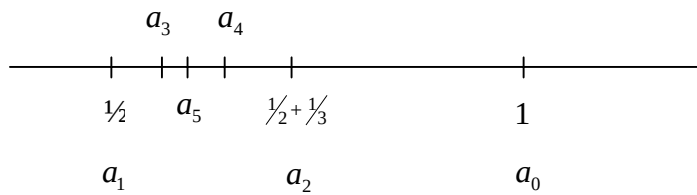
Sei $(a_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ eine alternierende Folge und $(|a_n|)_{(n \in \mathbb{N})}$ sei monoton fallende Nullfolge. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent.}$$

Beispiel:

„alternierende harmonische Reihe“

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \quad 1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{6}, \dots$$



$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \dots$$

Beweis:

o.E. $a_0 > 0$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0, \dots$

$$\text{Sei } b_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

$$\Rightarrow b_{2n} > b_{2n+1} = b_{2n} + a_{2n+1}, \quad a_{2n+1} < 0$$

Behauptung: $(b_{2n})_{(n \in \mathbb{N})}$ ist monoton fallend
 $(b_{2n+1})_{(n \in \mathbb{N})}$ ist monoton steigend

$$\begin{aligned} b_{2n+2} &= b_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} & |a_{2n+1}| &\geq |a_{2n+2}| \\ & & -a_{2n+1} &\geq a_{2n+2} \\ \Rightarrow b_{2n+2} &\leq b_{2n} & \Rightarrow 0 &\geq a_{2n+1} + a_{2n+2} \\ & & \Rightarrow b_{2n} &\geq b_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2n+3} &= b_{2n+1} + \underbrace{a_{2n+2} + a_{2n+3}}_{\geq 0} \\ \Rightarrow b_{2n+1} &\leq b_{2n+3} \end{aligned}$$

$b_{2n} - b_{2n-1} = a_{2n}$ konvergiert gegen 0

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n+1}$$

$$\Rightarrow (b_n)_{(n \in \mathbb{N})} \text{ ist konvergent} \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \quad \square$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \text{ ist konvergent}$$

(3.7) Definition

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Für jede Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ monoton steigend.

(3.8) Lemma

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist genau dann absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ beschränkt ist.

Beweis:

$\left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend.

Aus (1.15) (monotone Konvergenz) folgt die Behauptung.

(3.9) Korollar

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent. Dann sind $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k$ absolut konvergent.

Beweis:

$$\sum_{k=0}^n |a_k + b_k| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| + \sum_{k=0}^n |b_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$$

$\Rightarrow$ 1.Behauptung - 2.Behauptung analog

(3.10) Satz

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und es gilt $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$

Beweis:

Idee: Cauchy-Kriterium

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 : \forall n \geq m \geq n_0 : \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon$

Es gilt $\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq n_0$

$\Rightarrow$ Die Partialsummen $\left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ bilden eine Cauchy-Folge, d.h. sie erfüllen Kriterium (1.21)

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent
Cauchy-K.

Aus $\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k|$ folgt die Abschätzung

! Nicht jede konvergente Reihe ist absolut konvergent !

(3.11) Definition

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt **Majorante** für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, wenn für fast alle n gilt: $|a_n| \leq |b_n|$

(3.12) Majorantenkriterium

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent und eine Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis:

Sei $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \geq n_0$. Sei $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=0}^n |a_k| &= \sum_{k=0}^{n_0} |a_k| + \sum_{k=n_0+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n_0} |a_k| + \sum_{k=n_0+1}^n |b_k| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0} |a_k| + \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \Rightarrow \text{Behauptung} \end{aligned}$$

Die wichtigste Reihe als Majorante ist die Reihe

$$c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k, 0 < q < 1$$

(3.13) Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle n . Es gebe eine Zahl $0 < q < 1$ derart, dass

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \text{ für fast alle } n.$$

Dann gibt es eine Majorante der Form $c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$

Insbesondere ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Es gelte $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \forall n \geq n_0$

$$n \geq n_0 \quad |a_{n+1}| \leq |a_n| \cdot q \leq |a_{n-1}| \cdot q^2 \leq \dots \leq |a_{n_0}| \cdot q^{n-n_0+1} \\ = \underbrace{|a_{n_0}|}_{C} \cdot q^{n+1}$$

$$\Rightarrow |a_{n+1}| \leq C \cdot q^{n+1} \quad \forall n > n_0$$

Beweis:

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n > n_0$ gilt: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$

$$\Rightarrow \underset{\text{Ind.}}{|a_n|} \leq q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}| \quad \forall n \geq n_0 \\ = \underbrace{|a_{n_0}|}_{C} \cdot q^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} C \cdot q^k \text{ ist Majorante für } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Bemerkungen

(1) Das Quotientenkriterium ist anwendbar, wenn $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right)_{n \geq n_0}$ konvergent mit Grenzwert $q < 1$.

(2) Es reicht nicht, dass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ für fast alle n .

$$\text{Bsp.: } a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \nexists \text{ geometrische Reihe als Majorante}$$

(3.14) Beispiel

(1) Sei $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{falls } n > 2|x|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ ist absolut konvergent}$$

(2) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{heißt } \underline{\text{Exponentialfunktion}}$$

(3.15) Wurzelkriterium

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Es gebe eine Zahl $0 < q < 1$ derart, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle n .

Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis:

Für fast alle n gilt $|a_n| \leq q^n \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist Majorante $\Rightarrow$ Behauptung

Bemerkung:

„ $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ “ für ein $0 < q < 1$ ist äquivalent zu $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

All diese Kriterien sind **hinreichend**, aber nicht notwendig!

(3.16) Beispiel

Sei $r \geq 2, r \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ ist absolut konvergent

Es genügt, $r = 2$ zu betrachten

$$\frac{1}{\frac{(k+1)^2}{1}} = \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Trick:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ absolut konvergent}$$