

§2 Suprema und Infima

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$

M nach oben beschränkt: $\exists C \in \mathbb{R} : x \leq C \quad \forall x \in M$

M nach unten beschränkt: $\exists C \in \mathbb{R} : C \leq x \quad \forall x \in M$

C heißt eine **obere bzw. untere Schranke** für M .

(2.1) Satz

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann besitzt M eine **kleinste obere Schranke** C_0 .

Jede nach unten beschränkte Menge besitzt eine größte untere Schranke.

C_0 **ist** obere Schranke und ist C irgendeine obere Schranke, so ist $C_0 \leq C$.

Beweis:

Konstruiere Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}, (C_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ mit

- a) (x_n) monoton steigend
 - b) (C_n) monoton fallend
 - c) $\forall n : C_n$ ist obere Schranke für M
 - d) $\forall n \exists x \in M : x_n \leq x$
 - e) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$
- } $\Rightarrow x_n \leq C_n$

Sei $x_1 \in M$, C_1 sei obere Schranke

Seien x_n, C_n konstruiert mit Eigenschaften (a), (b), (c), (d)

$$\text{Sei } y_{n+1} = \frac{x_n + C_n}{2} \quad x_n \leq y_{n+1} \leq C_n$$

1.Fall:

y_{n+1} ist obere Schranke

$$C_{n+1} := y_{n+1}, x_{n+1} := x_n \quad \Rightarrow x_{n+1}, C_{n+1} \text{ haben alle Eigenschaften}$$

2.Fall:

y_{n+1} ist keine obere Schranke

$$\Rightarrow \exists x \in M : y_{n+1} < x \quad \text{Setze } x_{n+1} := y_{n+1}, C_{n+1} := C_n$$

$$C_n - x_n = \frac{C_1 - x_1}{2^{n-1}} \quad \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n =: C_0$$

Behauptung: C_0 ist kleinste obere Schranke für M

- C_0 ist obere Schranke: Wäre $x \in M$ mit $x > C_0$
 $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : x > C_{n_0} \geq C_0$ ✗ da C_{n_0} obere Schranke ist
 $\Rightarrow$ Behauptung
- Sei $C < C_0 \Rightarrow C < x_{n_0} \leq C_0$
 $\Rightarrow \exists x \in M : x_{n_0} \leq x \Rightarrow C < x \Rightarrow C$ ist keine obere Schranke
_(d)
 $\Rightarrow$ Behauptung

Untere Schranke analog

Die kleinste obere Schranke von M heißt **Supremum** von M . $\sup M$
 Die größte untere Schranke von M heißt **Infimum** von M . $\inf M$

Beispiel:

Sei $a < b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \end{aligned}$$

$$\sup[a, b] = b = \sup(a, b)$$

$$\inf[a, b] = a = \inf(a, b)$$

$$\text{Sei } \emptyset \subseteq N \subseteq M \Rightarrow \sup N \leq \sup M$$

$$\inf N \geq \inf M$$

$$\text{Sei } M \text{ beschränkt} \Rightarrow M \subseteq [\inf M, \sup M]$$

Sei $(a_n)_{(n)}$ Folge nach oben beschränkt

$$\sup (a_n)_{(n)} := \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Sei $(a_n)_{(n)}$ nach oben beschränkt, sei M die Menge der H.P. von $(a_n)_{(n)}$. Sei $M \neq \emptyset$

Sei $a := \sup M$, a heißt **Limes superior** der Folge $(a_n)_{(n)} : \overline{\lim}(a_n)$

Analog: $\underline{\lim}(a_n) := \inf M$

Limes inferior, falls $(a_n)_{(n)}$ nach unten beschränkt und $M \neq \emptyset$.

(2.2) Satz

Sei $(a_n)_{(n)}$ nach oben beschränkt und besitze einen H.P.

(a) $a := \overline{\lim}(a_n)_{(n)}$ ist der größte H.P. der Folge

(b) Für $c \in \mathbb{R}$ sind äquivalent

$$(1) \quad c = \overline{\lim}(a_n)_{(n)}$$

- (2) $\forall c' > c$ gibt es höchstens endlich viele $n : a_n \geq c'$ und $\forall c'' < c$ gibt es unendlich viele $n : a_n \geq c''$

Beweis:

(a) Sei $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists a' \in M : a - \frac{\varepsilon}{2} < a' \leq a$$

$$\Rightarrow a' \text{ ist H.P.} \Rightarrow \exists \text{ unendlich viele } n \text{ mit } |a' - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow a \text{ ist H.P.}$$

$$\Rightarrow (a)$$

(b) (1) $\Rightarrow$ (2) Sei $c = a$ Sei $c' > c$

$N := \{n : a_n \geq c'\}$ Wäre N unendlich

$$\Rightarrow (a_n)_{(n)} \text{ ist beschränkt und } a_n \geq c' \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (a_n)_{(n)} \text{ hat H.P. } b \Rightarrow b \geq c'$$

$$\Rightarrow b \text{ ist H.P. } (a_n)_{(n)} \text{ also } b \in M \text{ und } b > a \quad \text{✗}$$

Sei $c'' < c$. Annahme $\exists$ nur endlich viele n mit $a_n \geq c''$

$$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \leq c'' < c$$

$$\Rightarrow \text{jeder H.P. } b \text{ ist kleiner oder gleich } c''$$

$$\Rightarrow c'' < a \text{ ist obere Schranke für } M \quad \text{✗}$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Beh. c ist H.P. Sei $\varepsilon > 0$, $c'' := c - \varepsilon$, $c' = c + \varepsilon$

$$\Rightarrow \exists \text{ unendlich viele } n : a_n > c'' \text{ und nur endlich viele } n : a_n \geq c + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists \text{ unendlich viele } n : c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon \Rightarrow |c - a_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow c \text{ ist H.P.}$$

$$\text{Sei } c' > c, \text{ Sei } \tilde{c} = \frac{c + c'}{2} \quad c < \tilde{c} < c'$$

Es gibt nur endlich viele $n : a_n \geq \tilde{c} \Rightarrow c'$ ist kein H.P.

$$\Rightarrow c = \overline{\lim}(a_n)$$

$$\Rightarrow (b)$$

Beispiel:

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\text{ist } (a_n) \text{ konvergent} \Rightarrow \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} > \overline{\lim} \left(\frac{1}{n} \right)_{(n)}$$

$$a_n = 0 \Rightarrow a_n \geq \overline{\lim} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$