

§10 Taylorpolynome und lokale Extrema

(10.1) Einführung

Sei $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ eine Polynomfunktion, und sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dann kann man $p(x)$ schreiben als

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \sum_{i=0}^n a_i (x - x_0 + x_0)^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \cdot \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a_i x_0^{i-j} \cdot (x - x_0)^j \\
 &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=j}^n \binom{i}{j} a_i x_0^{i-j} \right) (x - x_0)^j \\
 &= \sum_{j=0}^n b_j (x - x_0)^j \quad (*)
 \end{aligned}$$

wobei

$$b_j = \sum_{i=j}^n \binom{i}{j} a_i x_0^{i-j}.$$

(*) heißt die **Entwicklung** von p um den Punkt x_0 .

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
 p^{(k)}(x) &= \sum_{j=k}^n b_j \cdot j \cdot (j-1) \cdot \dots \cdot (j-k+1) (x - x_0)^{j-k} \\
 \Rightarrow p^{(k)}(x_0) &= b_k \cdot k! \\
 \Rightarrow b_k &= \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}
 \end{aligned}$$

Also

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Sei nun $I = [a, b]$,

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n mal differenzierbar

und sei $x_0 \in I$.

Gesucht ist ein Polynom $p(x)$ vom Grad n mit $p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $0 \leq k \leq n$.

$$\text{Ansatz: } p(x) = \sum_{i=0}^n b_i (x - x_0)^i$$

$$\Rightarrow \text{wie oben } b_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

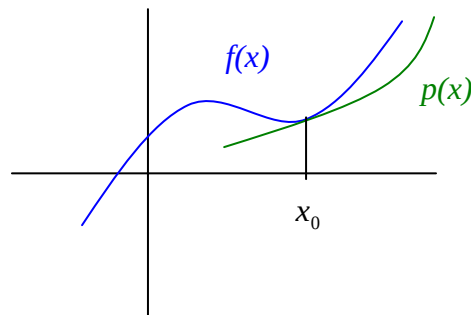
$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \text{ hat diese Eigenschaft.}$$

(10.2) Definition

$$p_{n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \text{ heißt das } n\text{-te } \underline{\text{Taylorpolynom}} \text{ von } f \text{ in } x_0.$$

Beispiel:

$p_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die Tangente an den Graphen von f in x_0 .



$R_n(x) = R_{n,x_0}(x) = f(x) - p_{n,x_0}(x)$ heißt das n -te Restglied.

Ziel: Eine Formel für $R_n(x_1)$, $x_1 \neq x_0$

Sei dazu f $(n+1)$ mal differenzierbar.

Betrachte für $x \in I$

$$f(x_1) - p_{n,x_0}(x_1)$$

$$\text{Sei } q(x) = p_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$\Rightarrow q(x_1) = f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_1) - p_{n,x_0}(x_1) = q(x_1) - q(x_0)$$

Wir berechnen $q'(x)$

$$\begin{aligned} q'(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot k(x - x_0)^{k-1} \cdot (-1) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{aligned}$$

Sei nun $r = (x_1 - x_0)^{n+1}$

Der Mittelwertsatz (9.3) liefert nun ein $\xi \in]x_0, x_1[$ (bzw. $\xi \in]x_1, x_0[$)

$$\frac{q(x_1) - q(x_0)}{r(x_1) - r(x_0)} = \frac{q'(\xi)}{r'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Also

$$\frac{f(x_1) - p_{n,x_0}(x_1)}{-(x_1 - x_0)^{n+1}} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Damit ist bewiesen:

(10.3) Satz von Taylor

Sei f in I $(n+1)$ -mal differenzierbar. Seien $x_0 \neq x_1$ in I .

Dann existiert ein $\xi \in]x_0, x_1[$ (bzw. $\xi \in]x_1, x_0[$) mit

$$f(x_1) = p_{n,x_0}(x_1) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x_1 - x_0)^{n+1}.$$