

Analysis

Vorlesungsmitschrift von
Frank Schmidt

Korrektur gelesen von
Oliver Müller

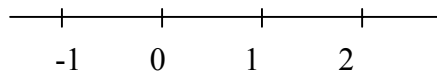
§1 Folgen reeller Zahlen

(1.1) Die reellen Zahlen

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\mathbb{R} \supseteq Q$$



Zahlengerade

(1.2) Eigenschaften

I. Zu $a, b \in \mathbb{R}$ ist $a + b$ wohldefiniert

Es gelten

- | | |
|---|--|
| (a) Assoziativgesetz | $(a + b) + c = a + (b + c)$ |
| (b) Kommutativgesetz | $a + b = b + a$ |
| (c) $0 \in \mathbb{R}$ erfüllt | $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ |
| (d) Sei $a \in \mathbb{R}$, $-a$ erfüllt | $a + (-a) = 0$ |

II. Zu $a, b \in \mathbb{R}$ ist $a \cdot b$ wohldefiniert

Es gelten

- | | |
|---|--|
| (a) Assoziativgesetz | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ |
| (b) Kommutativgesetz | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| (c) 1 erfüllt | $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ |
| (d) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, dann erfüllt a^{-1} | $a \cdot a^{-1} = 1$ |

III. **Distributivgesetz:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

IV. $\mathbb{R}$ ist total geordnet durch $\leq$

Es gelten

- | | |
|---|--|
| (a) Ist $a \leq b, c \in \mathbb{R}$ | $\Rightarrow a + c \leq b + c$ |
| (b) Ist $a \leq b, c \in \mathbb{R}, c > 0$ | $\Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ |
| (c) Archimedisches Axiom: Seien $a, b > 0$ | |
| Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $n \cdot a > b$ | |

Bemerkung:

- Q hat dieselben Eigenschaften I-IV
- $\mathbb{Z}$ ebenso außer II (d)
- I-III sind genau die Merkmal eines **Körpers**.

(1.3) Folgerungen

(1.3.1) Folgerungen aus I-III

(1) $0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (\text{Z})$

Beweis: Es ist $0 \cdot a \stackrel{I(c)}{=} (0+0) \cdot a$
 $= 0 \cdot a + 0 \cdot a$
 $\Rightarrow 0 \cdot a + (-(0 \cdot a)) = 0 \cdot a + 0 \cdot a + (-(0 \cdot a))$
 $0 = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$

(2) Die Gleichung $a + x = b$ hat $\forall a, b \in \mathbb{R}$ genau die Lösung $x = b + (-a) := b - a \quad (\text{Z})$

Beweis: Sei x Lösung
 $\Rightarrow (-a) + a + x = b + (-a)$
 $\Leftrightarrow 0 + x = b + (-a)$
 $\Leftrightarrow x = b + (-a)$
 $a + (b + (-a)) = a + (-a) + b = 0 + b = b \Rightarrow \text{Behauptung}$

(3) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot a = a + \dots + a$

Beweis: $n \cdot a = (1 + \dots + 1)a = 1 \cdot a + \dots + 1 \cdot a = a + \dots + a$

(4) $(-a) \cdot b = -(ab) \quad (\text{Z})$

Beweis: $(a + (-a))b = 0 \cdot b = 0$
 $\Rightarrow ab + (-a) \cdot b = 0$
 $\Rightarrow ab + (-(ab)) = 0$
 $\Rightarrow (-a)b = -(ab)$

(5) $-(-a) = a \quad (\text{Z})$

Beweis: $a + (-a) = 0 = -(-a) + (-a) \Rightarrow a = -(-a)$

(6) Die Gleichung $ax = b$ hat für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ genau die Lösung $x = b \cdot a^{-1}$

Beweis: wie (2)

(1.3.2) Folgerungen aus I-IV

(7) $c \leq 0 \Leftrightarrow -c \geq 0$

Beweis: $c \leq 0 \Leftrightarrow c + (-c) \leq -c$
 $\Leftrightarrow 0 \leq -c$

(8) $1 > 0$

Beweis: sonst wäre $-1 > 0$
 $\Rightarrow (-1)(-1) > 0 \quad IV(b)$
 $\Rightarrow 1 > 0 \quad \swarrow$

$$(9) \ c > 0 \Rightarrow c^{-1} > 0$$

Beweis: Wäre $c^{-1} < 0$ so wäre
 $c \cdot c^{-1} < 0$
 $1 < 0$ $\nearrow$

Distributivgesetz:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{l=1}^m b_l \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^m a_k \cdot b_l \right)$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ heißt $|a - b|$ der Abstand von a und b .

(1.4) Lemma

Es gelten

$$(a) \ |a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{„Dreiecksungleichung“}$$

$$(b) \ ||a| - |b|| \leq |a + b|$$

Offenbar gelten

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a^{-1}| = |a|^{-1}$
- $a \leq |a|$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{a.) } |a + b|^2 &= (a + b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \\ &\Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{mit IV(b)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } |b| &= |a + b - a| \\ &\leq |a + b| + |-a| \\ &\Rightarrow |b| - |a| \leq |a + b| \end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned} |a| - |b| &\leq |a + b| \\ \Rightarrow ||a| - |b|| &\leq |a + b| \Rightarrow \text{Behauptung} \end{aligned}$$

Bezeichnung:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$

$$\max(a, b) := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq b \\ b & \text{falls } b > a \end{cases}$$

induktiv $\max(a_1, \dots, a_n)$ Maximum

analog $\min(a_1, \dots, a_n)$ Minimum

Worin unterscheiden sich $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$?

$\mathbb{Q}$ hat Löcher.

Was ist ein Loch in $\mathbb{Q}$?

(1.5) Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{Q}$ bzw. $I \subseteq \mathbb{R}$

I ist eine **offene untere Halbgerade**, wenn gilt:

- (1) I hat kein größtes Element (offen)
- (2) Ist $x \in I$ und ist $y \leq x \Rightarrow y \in I$ (Halbgerade)
- (3) $I \neq \mathbb{Q}$, bzw. $I \neq \mathbb{R}$

Beispiele:

I. Sei $a \in \mathbb{Q}$

$$I_a := \{x \in \mathbb{Q} : x < a\}$$

$$x \in I_a \Rightarrow x < a \Rightarrow x < \frac{x+a}{2} < a$$

$\Rightarrow x$ ist kein größtes Element

$$x < a \quad y \leq x \Rightarrow y < a$$

II. $J := \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \vee x^2 < 2\}$

Sei $x \in J$: Ist $x \leq 0 \Rightarrow x < 1 \in J$

Sei $x \in J, x > 0$

$$\Rightarrow 2 - x^2 > 0 \quad \text{und} \quad x < 2$$

$$\exists n \in \mathbb{Q} : \frac{2-x^2}{5} > \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 &= x^2 + 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &< x^2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n} = x^2 + \frac{5}{n} < x^2 + (2 - x^2) = 2 \end{aligned}$$

$$x + \frac{1}{n} \in J \Rightarrow x \text{ nicht größtes Element}$$

Eigenschaften (2) und (3) sind leicht!

$\Rightarrow J$ offene Halbgerade

Betrachtung:

Betrachte $C I_a$ und $C J$ in $\mathbb{Q}$

$$C I_a = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq a\}$$

$$C J = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ und } x^2 > 2\}, \text{ da gilt: } \forall x \in \mathbb{Q} \text{ ist } x^2 \neq 2$$

Typ 1: $I_a : \mathbb{C} \quad I_a$ hat ein kleinstes Element a

Typ 2: $J : \mathbb{C} \quad J$ hat kein kleinstes Element a

Eine Halbgerade vom Typ 2 beschreibt ein Loch in $\mathbb{Q}$.

V. Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Sei I eine offene Halbgerade in $\mathbb{R}$

Dann existiert eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $I = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ (Typ I)

(1.6) Satz

Sei $n \in \mathbb{N}_+$, sei $a \geq 0$ in $\mathbb{R}$

Dann existiert genau eine Zahl $b \geq 0$ mit $b^n = a$

(1.7) Satz

Es gibt keine Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$

Beweis:

Angenommen $x = \frac{a}{b}$ erfüllt $x^2 = 2$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 2b^2 \quad (\text{o.E.}) \quad a, b \in \mathbb{N}$$

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \quad b = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$$

Primzahlzerlegung ist eindeutig

$$a^2 = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_r \quad 2r \text{ Primzahlen}$$

$$2b^2 = 2q_1 \cdot \dots \cdot q_s \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_s \quad 2s+1 \text{ Primzahlen} \quad \text{⚡}$$

$\Rightarrow$ Behauptung

$J \subseteq \mathbb{Q}$, offene Halbgerade mit $\mathbb{C} \cap J$ hat kein kleinstes Element (Typ 2).

Sei $J \subset \mathbb{R}$ offene Halbgerade $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} \quad J = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

(1.8) Satz

Sei $a \geq 0 \Rightarrow \exists! b > 0 : b^n = a, n \in \mathbb{N}_+$

Beweis:

Ist $a = 0 \Rightarrow b = 0$ ist die einzige Zahl mit $b^n = 0$

Sei $a > 0$

Sei $J := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \text{ oder } x^n < a\}$

Behauptung: J ist eine offene Halbgerade

➤ **Existenz**

Sei $x \in J$

Falls $x \leq 0$, so sei $m \in \mathbb{N}_+ : m > a \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{m} < a$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{m}\right)^n \leq \frac{1}{m} < a \Rightarrow \frac{1}{m} \in J$$

$\Rightarrow x$ ist kein größtes Element in J

Sei $x > 0, x \in J$

Wir zeigen: $\exists \varepsilon > 0 : (x + \varepsilon)^n < a$

$$(x + \varepsilon)^n = x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \varepsilon^k =: A(x, \varepsilon)$$

Falls $\varepsilon < 1 \Rightarrow \varepsilon^k \leq \varepsilon \quad \forall k \geq 1$

$$\Rightarrow A(x, \varepsilon) \leq B(x, \varepsilon) = x^n + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \right)}_{C(x)} \cdot \varepsilon$$

Es genügt zu zeigen: $\exists \varepsilon > 0 : x^n + C(x) \cdot \varepsilon < a$

$$\text{Wähle } \varepsilon = \frac{a - x^n}{C(x)}$$

Dann gilt $(x + \varepsilon)^n < a \Rightarrow \begin{cases} x \text{ ist nicht größtes Element in } J \\ J \text{ hat kein größtes Element} \end{cases}$

Leicht: $x \in J$ und $y \leq x \Rightarrow y \in J$

$J \neq \mathbb{R}$, da $(a+1)^n = 1 + na + \dots > a$

$\Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}$ mit $J = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, $b^n \geq a$, da $b \notin J$

Wäre $b^n > a$, so folgt (wie oben) $\exists \varepsilon > 0 : (b - \varepsilon)^n > a$ ✗ da $(b - \varepsilon) \in J \Rightarrow b^n = a$

➤ **Eindeutigkeit**

Sei $a = b_1^n = b_2^n$, $0 < b_1 \leq b_2$

Wäre $b_1 < b_2 \xRightarrow{\text{Ind.}} b_1^n < b_2^n$ ✗

Bezeichnung: $b := \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, wobei $b \geq 0$ und $b^n = a$

(1.9) Potenzen

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$

a^n definiert durch $a^0 = 1, a^{n+1} = a^n \cdot a$

Sei $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$

$$a^n := \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$$

Lemma:

(a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(b) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

(c) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Beweis (c):

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion (benutzt Kommutativgesetz)

$$\begin{aligned} (ab)^{n+1} &= (ab)^n (ab) = a^n \cdot b^n \cdot a \cdot b \\ &= a^n \cdot a \cdot b^n \cdot b = a^{n+1} b^{n+1} \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$

$$(ab)^{-n} = \left(\frac{1}{ab}\right)^n = \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n = a^{-n} \cdot b^{-n} \quad \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Quadratische Gleichungen:

$$x^2 + px + q = 0 \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 \quad \text{Quadratische Ergänzung}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

- falls $\frac{p^2}{4} - q < 0 \Rightarrow \nexists \text{Lösung in } \mathbb{R}$

- falls $\frac{p^2}{4} - q \geq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ oder } -\left(x + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

$$\Rightarrow x_{1,2} := -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

(1.10) Definition

Eine **Folge** reeller Zahlen ist eine Abbildung (Funktion) $A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Man benutzt häufig die Familienschreibweise

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ statt } A, \text{ d.h. } a_n = A(n)$$

Auch Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $N \subseteq \mathbb{N}$ heißen Folgen $(a_n)_{n \in N}$. Ist N endlich, so heißt $(a_n)_{n \in N}$ eine endliche Folge.

Im weiteren sei N eine unendliche Folge

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien Folgen

$(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Summe von $(a_n)_{(n)}$ und $(b_n)_{(n)}$

$(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Produkt von $(a_n)_{(n)}$ und $(b_n)_{(n)}$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge $N \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n \in N}$ heißt **Teilfolge** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(1.11) Konvergenz

Definition:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$. Sie heißt konvergent $:\Leftrightarrow$ es gibt eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ derart dass gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |a - a_n| < \varepsilon$$

Ist $(a_n)_{(n)}$ konvergent, so heißt a der Grenzwert (Limes) von $(a_n)_{(n)}$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

(1.12) Beispiele

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

$$(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0. \text{ Dann } \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{Wähle } n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Sei $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon^2$$

$$\text{Wähle } n_0 \in \mathbf{N}: \frac{1}{n_0} < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall n \geq n_0: \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon$$

$$(3) \text{ Sei } q \in \mathbf{R}, \quad |q| < 1, \quad a_n = q^n, \quad n \in \mathbf{N} \quad (\text{z.B. } \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0)$$

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

$$\text{o.E. } |q| > 0, \text{ sei sogar } q > 0 \quad q = (1 - \delta) \quad \delta > 0$$

Betrachte: $q^{-1} > 1$

$$q^{-1} = 1 + \delta', \quad \delta' > 0$$

$$(q^{-1})^n = (1 + \delta')^n = 1 + n \cdot \delta' + \binom{n}{2} \dots > 1 + n \cdot \delta'$$

Sei $\varepsilon > 0$

$$|q^n| < \varepsilon \quad :\Leftrightarrow q^n < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow (q^{-1})^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{wähle } n_0 \in \mathbf{N} \text{ so dass } n_0 \cdot \delta' > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0: n \cdot \delta' \geq n_0 \cdot \delta' > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0: (q^{-1})^n > 1 + n \delta' > n \delta' > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0: q^n < \varepsilon$$

$$(4) \text{ Sei } c \in \mathbf{R} \quad a_n = c \quad \forall n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0: \forall n \in \mathbf{N}: |a_n - c| = |0| < \varepsilon$$

(1.13) Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ heißt **nach oben beschränkt** (bzw. nach unten beschränkt)

$$:\Leftrightarrow \exists C \in \mathbf{R}: a_n \leq C \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

$$(\text{bzw. } \exists C \in \mathbf{R}: a_n \geq C \quad \forall n \in \mathbf{N})$$

$$(a_n) \text{ **beschränkt**: } \exists C, D \in \mathbf{R}: C \leq a_n \leq D \quad \forall n$$

(1.14) Satz

Sei $(a_n)_{(n)}$ konvergent

Dann ist $(a_n)_{(n)}$ beschränkt

Beweis:

Sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, sei $\varepsilon = 1$

$$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a - a_n| < 1$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq |a_n - a| + |a|$$

$$\text{Sei } C := \max(|a_0|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + 1)$$

$$\Rightarrow -C < a_n < C \quad \forall n \quad \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Also: $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber nicht konvergent.

(1.15) Definition

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **monoton steigend**, wenn $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

monoton fallend $:\Leftrightarrow a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$

falls $a_n < a_{n+1} \Rightarrow (a_n)_{(n)}$ streng monoton steigend (analog streng monoton fallend)

(1.16) Satz

Eine monotone (steigend oder fallend) Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " (1.13)

" $\Leftarrow$ " Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend und beschränkt

$$\text{Sei } I := \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x < a_n\}$$

Behauptung 1: I ist eine offene Halbgerade

$$\text{Sei } x \in I \Rightarrow \exists n : x < a_n$$

$$\text{Sei } x' = \frac{x + a_n}{2} \Rightarrow x < x' < a_n$$

$$\Rightarrow x' \in I$$

$\Rightarrow x$ ist nicht größtes Element

$\Rightarrow I$ hat kein größtes Element

$$\text{Ist } x \in I, \quad y \leq x \Rightarrow y \in I$$

(a_n) beschränkt $\Rightarrow \exists C : a_n < C \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow C \notin I$
 $\Rightarrow I \neq \mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ Behauptung 1

Vollständigkeit $\Rightarrow \exists a : I = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Behauptung 2: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow a - \varepsilon \in I$

$\Rightarrow \exists n_0 : a - \varepsilon < a_n$

Es gilt $a_n \leq a \quad \forall n$, da $a \notin I$

Es folgt

$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow a - a_n = |a - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow$ Behauptung

monoton analog oder durch Übergang zu $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(1.16.1) Bernoullische Ungleichung

Sei $-1 < h$, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

Beweis:

Falls $h \geq 0 \Rightarrow$ Behauptung (binomische Formel)

Sei $h < 0$ Induktion über n

I.S. $(1+h)^{n+1} \geq (1+nh)\underbrace{(1+h)}_{>0} = 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h$

Beispiel:

- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$

Behauptung: $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$ (monoton steigend)

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \stackrel{B}{\underset{U}{\geq}} \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3}\right) > 1 \\
&\Rightarrow a_n < a_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow a_n < b_n$$

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{(n+1)^2}{(n+2)n}\right)^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{(n+2)n}\right)^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \stackrel{B.}{\leq} \frac{1}{\left(1 + \frac{n+1}{(n+2)n}\right)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{(n+2)n}{n^2 + 3n + 1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{n^3 + 4n^2 + 4n + 1} < 1 \\
&\Rightarrow b_{n+1} < b_n
\end{aligned}$$

$$\text{Also: } a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7181\dots$$

(1.17) Satz

Seien $(a_n)_{(n)}, (b_n)_{(n)}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = a \pm b$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

$$(c) \quad \text{Ist } b \neq 0 \text{ so gilt } b_n \neq 0 \text{ für fast alle } n, \text{ etwa } \forall n \geq n_0 \text{ und } \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \geq n_0}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Beweis:

(a) Es gilt $|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : |a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$$

(b) $|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$

$$\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|$$

$$\exists C : |a_n| \leq C, |b| \leq C \quad \forall n$$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C}, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$$

(c) Sei $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |b - b_n| < \frac{|b|}{2}$$

$$\Rightarrow |b_n| \geq |b| - |b - b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0$$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|}$$

$$\text{Sei } C > 0 : |b_n| > C, |b| > C \quad \forall n \geq n_0$$

$$\exists n_1 : \forall n \geq n_1$$

$$|b - b_n| < \varepsilon \cdot C^2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{\varepsilon \cdot C^2}{|b_n| \cdot |b|} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

(1.18) Beispiele

$$(1) \ a_n = \frac{2n^2 + 3n}{n^2 - n + 2}$$

$$a_n = \frac{n^2 \left(2 + \frac{3}{n} \right)}{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} = 2$$

$$(2) \ a_n = n^5 - 5n^4 + 2$$

$$a_n = n^5 \underbrace{\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^5} \right)}_{> 1/2 \text{ f. f. a. n}} \Rightarrow a_n \text{ nicht beschränkt} \Rightarrow \text{nicht konvergent}$$

$$(3) \ a_n = \frac{2n^3 - n^2 + n}{n^4 - n^3 + 1}$$

$$= \frac{n^3 \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^4 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4} \right)}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(4) \ \text{Sei } 0 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

$$q^{n+1} = q^n \cdot q$$

$$0 < q^n < q^{n+1} \Rightarrow (q^n) \text{ ist konvergent}$$

$$\text{Sei } a = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \quad \text{Sei } b_n = q^{n+1} = q^n \cdot q$$

$$\lim b_n = \lim q^{n+1} = a \quad \text{auch } \lim q^{n+1} = \lim q \cdot q^n = q \cdot a$$

$$a = q \cdot a \Rightarrow a = 0, \text{ (mit } q > 0)$$

(1.19) Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge

$a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von (a_n) wenn gilt:

$\forall \varepsilon > 0$ gibt es unterschiedlich viele $n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon$

Beispiel:

$$a_n = (-1)^n$$

$$|a_n - 1| = 0 < \varepsilon \quad \forall n = 2m$$

$$|a_n + 1| = 0 < \varepsilon \quad \forall n = 2m + 1$$

Äquivalent: $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq m : |a_n - a| < \varepsilon$

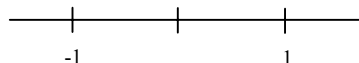
„ $\Rightarrow$ “ Sei a H.P. Sei $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n \geq m : |a_n - a| < \varepsilon$ da es ∞ viele solche n gibt

„ $\Leftarrow$ “ Sei $n_k \in \mathbb{N} : n_k \geq k$ und $|a - a_{n_k}| < \varepsilon$
solche n_k existieren $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ ist unendlich

Beispiele:

(1) $a_n = (-1)^n$

$\Rightarrow 1$ und -1 sind H.P. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

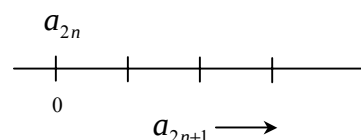


(2) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$\Rightarrow a$ ist H.P. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es ist der einzige!

(3) $a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ n & n \text{ ungerade} \end{cases}$

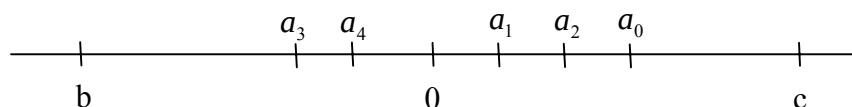
$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent, 0 ist der einzige H.P.



(4) $a_n = n$ hat keinen Häufungspunkt

(1.20) Satz von Bolzano-Weierstraß

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann hat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mindestens einen H.P.



Beweis:

Es existieren $b < c : b \leq a_n < c \quad \forall n$

Definiere Zahlen b_n, c_n mit

a) $[b_n, c_n]$ enthält unendlich viele Folgenglieder

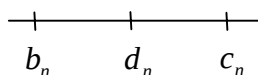
b) $b_n \leq b_{n+1}$, $c_n \leq c_{n+1} \quad \forall n$

c) $c_n - b_n = \frac{c_0 - b_0}{2^n}$

Sei $b_0 := b$, $c_0 := c$

Seien konstruiert

Sei $d_{n+1} := \frac{b_n + c_n}{2}$



1.Fall

In $[b_n, d_{n+1}]$ liegen unendlich viele Glieder

Setze $b_{n+1} = d_{n+1}$, $c_{n+1} = d_{n+1}$

2.Fall

In $[b_n, d_{n+1}]$ liegen nur endlich viele der a_n

$\Rightarrow$ In $[d_{n+1}, c_n]$ liegen unendlich viele der a_n

Setze $b_{n+1} = d_{n+1}$, $c_{n+1} = c_n$

b_n monoton steigend und beschränkt $\Rightarrow$ konvergent

Sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

Behauptung: a ist H.P. der Folge $(a_n)_{(n)}$

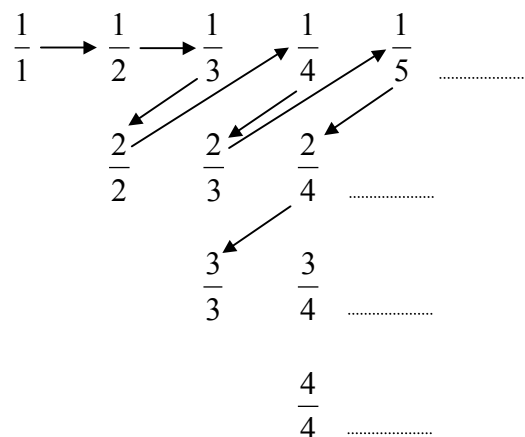
Sei $\varepsilon > 0$ $\exists m \in \mathbb{N}: |b_m - c_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x \in [b_m, c_m]: |a - x| < \varepsilon$, da $b_m \leq a \leq c_m$

$\Rightarrow \forall a_n \in [b_m, c_m]: |a - a_n| < \varepsilon$

Davon gibt es unendlich viele n.

┘

Beispiel:

$\mathbb{Q} \cap (0,1]$

$a_0 = \frac{1}{1}$ Sei $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ ungekürzter Bruch

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{p_n+1}{q_n-1} & \text{falls } p_n+1 \leq q_n-1 \\ \frac{1}{p_n+q_n} & \text{falls } p_n+1 > q_n-1 \end{cases}$$

a_n ist beschränkt. $[0,1]$ ist die Menge der H.P.

(1.21) Satz

Sei a ein H.P. der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Dann existiert ein Teilfolge $(a_n)_{n \in N}$ mit $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} a_n = a$

Beweis:

Definiere Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $m_{k+1} > m_k$, $|a - a_{m_k}| < \frac{1}{k+1}$

Solche m_k existieren, da $|a_n - a| < \frac{1}{k+1}$ für unendlich viele n gilt.

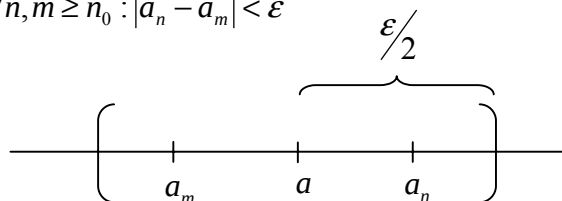
Sei $N = \{m_k, k \in \mathbb{N}\}$ ist unendliche Menge

Sei $k_0 \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow \forall k \geq k_0 : |a - a_{m_k}| < \frac{1}{k_0} \Rightarrow \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} a_n = a$

(1.22) Cauchysche Konvergenzkriterien

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Genau dann ist (a_n) konvergent, wenn gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

**Beweis:**

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$

Es gelte das Kriterium

Behauptung 1: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt

Beweis: Sei $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < 1$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : |a_n - a_{n_0}| < 1$

$\Rightarrow |a_n| \leq |a_{n_0}| + |a_n - a_{n_0}| < |a_{n_0}| + 1$

Sei $C = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1)$

$\Rightarrow |a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Nach Bolzano-Weierstraß $\exists$ H.P. a von (a_n)

Behauptung 2: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$a \text{ ist H.P.} \Rightarrow \exists n_1 : |a - a_{n_1}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ wobei } n_1 \geq n_0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : |a - a_n| \leq |a - a_{n_1}| + |a_{n_1} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Beispiel:

$$a_0 = 1 \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

$$1 \leq a_n \leq 2 \quad \Rightarrow \frac{1}{a_n} \leq 1$$

$$\text{sogar für } n \geq 1 : \frac{3}{2} \leq a_n \leq 2, \text{ da } \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow (a_n)_{(n)} \text{ beschränkt}$$

Betrachte $|a_{n+k} - a_n|$

$$\begin{aligned} |a_{n+k+1} - a_{n+1}| &= \left| 1 + \frac{1}{a_{n+k}} - 1 - \frac{1}{a_n} \right| \\ &= \frac{|a_n - a_{n+k}|}{|a_{n+k}| \cdot |a_n|} \leq \frac{|a_n - a_{n+k}|}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{9} \cdot |a_n - a_{n+k}| \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Ind.}}{\Rightarrow} |a_{n+k} - a_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \underbrace{|a_{1+n} - a_1|}_{<1} \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0. \text{ Wähle } n_0 \text{ so, dass } \left(\frac{4}{9}\right)^{n_0-1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Sei } n = n_0 + k, m = n_0 + l$$

$$\Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_{n_0+k} - a_{n_0}| + |a_{n_0+l} - a_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow (a_n)_{(n)} \text{ erfüllt das Cauchy-Kriterium} \Rightarrow (a_n)_{(n)} \text{ ist konvergent}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$$

$$b_n = a_{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right) = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

$$\Rightarrow a = 1 + \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \quad , a \geq 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$