

Mathematik für Informatiker, 2. Tutorium

Dominik Dietrich, Michael Sauer, Oliver Vogel
es wird keine Gewähr für Richtigkeit übernommen

17. Dezember 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Konvergenz von Folgen	2
1.1	Grundlagen	2
1.2	Konvergenzkriterien	3
1.3	Grenzwertberechnungen	6
2	Reihen	7
2.1	Potenzreihen	13
3	Stetigkeit	18

1 Konvergenz von Folgen

1.1 Grundlagen

Definition 1.1 Eine reelle Folge (a_n) heisst konvergent gegen a , falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

Konvergiert (a_n) gegen a , so nennt man a den Grenzwert oder Limes der Folge und schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Eine Folge die nicht konvergiert, heisst divergent

Definition 1.2 Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heisst nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (bzw. $a_n \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$). Eine Folge heisst beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Satz 1.3 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Satz 1.4 Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen reeller Zahlen. Dann konvergieren auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$ und die Produktfolge $(a_n b_n)$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \end{aligned}$$

Satz 1.5 Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim b_n = b \neq 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq N$ und die Quotientenfolge $\left(\frac{a_n}{b_n} \right)$ konvergiert. Für den Grenzwert gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Definition 1.6 Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heisst

- monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton wachsend, falls $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend, falls $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend, falls $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1.2 Konvergenzkriterien

Definition 1.7 (Cauchy-Folge) Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Satz 1.8 Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy Folge.

Beweis: Die Folge (a_n) konvergiere gegen a . Dann gibt es zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N$$

Für alle $n, m \geq N$ gilt dann

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

.

Satz 1.9 (Cauchy-Kriterium) In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy Folge.

Satz 1.10 (Monotonie-Kriterium) Jede beschränkte monotone Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert.

Aufgaben 1.11 Hier soll die Anwendung des Cauchy Kriteriums geübt werden.

a) Konvergiert die Folge (x_n) mit $x_n := \sum_{i=-k}^n 5 \cdot 3^{-i}$?

Lösung: Zeige, daß (x_n) eine Cauchy Folge ist. Sei $n \geq m \geq -k$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \sum_{v=-k}^n 5 \cdot 3^{-i} - \sum_{v=-k}^m 5 \cdot 3^{-i} \right| = \left| \sum_{v=m+1}^n 5 \cdot 3^{-i} \right| \\ &= \sum_{v=m+1}^n 5 \cdot 3^{-i} \leq 5 \cdot 3^{-m-1} \sum_{v=0}^{n-m-1} 3^{-v} \leq 5 \cdot 3^{-m-1} \frac{1}{1-3^{-1}} \\ &= \frac{5}{2} 3^{-m} < \epsilon \quad \text{falls } m \text{ hinreichend groß gewählt wird} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.12 Sei (b_k) eine Folge. Weiterhin seien (a_k) und (c_k) konvergente Folgen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c$ für die gilt:

$$\forall k : a_k \leq b_k \leq c_k$$

Bestimmen sie, ob die Folge (b_k) konvergiert und - falls (b_k) konvergent ist - geben sie ein Intervall an, in dem der Grenzwert von (b_k) liegt.

Lösung: Die Folge (b_k) ist nicht notwendigerweise konvergent. Betrachte hierzu das Intervall $[a, c]$ mit Mittelpunkt $\frac{c-a}{2}$. Sei

$$b_k := \frac{c-a}{2} + (-1)^k \cdot \epsilon + d_k$$

mit $\epsilon < \frac{c-a}{2}$ und (d_k) einer Nullfolge die so gewählt wurde, daß gilt:

$$a_k \leq b_k \leq c_k \quad \forall k$$

Dann sind alle Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt und dennoch divergiert die Folge (b_k) , da sie 2 Grenzwerte besitzt, nämlich $\frac{c-a}{2} + \epsilon$ und $\frac{c-a}{2} - \epsilon$.

Aufgabe 1.13 Berechnen Sie - falls möglich - den Grenzwert der Folge (a_n) mit

(a)

$$(a_n) = \frac{(3n+1)^3(2n+1)}{9n^4-1}$$

(b)

$$(a_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}, \quad n > 1$$

(c)

$$(a_n) = \frac{(-1)^n(3n-1)^2}{n^2-2}$$

Lösung: zu (a):

$$\begin{aligned} (a_n) &= \frac{(3n+1)^3(2n+1)}{9n^4-1} \\ &= \frac{(27n^3+27n^2+9n+1)(2n+1)}{9n^4-1} \\ &= \frac{54n^4+54n^3+18n^2+2n+27n^3+27n^2+9n+1}{9n^4-1} \\ &= \frac{54n^4+81n^3+45n^2+11n+1}{9n^4-1} \\ &= \frac{54+81\frac{1}{n}+45\frac{1}{n^2}+11\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{9-\frac{1}{n^4}} \\ &\rightarrow 6 \end{aligned}$$

zu (b) :

$$\begin{aligned}
(a_n) &= \frac{1}{2\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} \\
&= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}(n+1-n)} \\
&= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n}}{2\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2} \\
&\rightarrow 1
\end{aligned}$$

zu (c) :

Betrachte die Teilfolgen (x_{2n}) und (x_{2n+1})

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= \frac{(-1)^{2n}(3n-2)^2}{n^2-2} \\
&= \frac{9n^2-12n+4}{n^2-2} \\
&= \frac{9-12\frac{1}{n}+4\frac{1}{n^2}}{1-2\frac{1}{n^2}} \\
&\rightarrow 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+1}(3(2n+1)-2)^2}{(2n+1)^2-2} \\
&= -\frac{(6n+1)^2}{(2n+1)^2-2} \\
&= -\frac{36n^2+12n+1}{4n^2-4n-1} \\
&\rightarrow -9
\end{aligned}$$

Die beiden Teilfolgen konvergieren gegen unterschiedliche Grenzwerte, also ist die Folge divergent. Anders ausgedrückt findet man hier 2 Teilfolgen die gegen 2 verschiedene Häufungspunkte konvergieren. Ein konvergente Folge besitzt aber genau einen Häufungspunkt. Also divergiert diese Folge.

Aufgabe 1.14 Untersuche die Folge $a_n = \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n$ auf Konvergenz **Lösung:** Wir verwenden das Monotoniekriterium, um die Konvergenz

nachzuweisen:

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \sqrt{25(n+1)^2 + 7(n+1) + 1} - \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5 \\
 &= \sqrt{25n^2 + 7n + 26 + 50n + 7} - (\sqrt{25n^2 + 7n + 1} + 5) \\
 &= \sqrt{25n^2 + 7n + 1 + 32 + 50n} - (\sqrt{25n^2 + 7n + 1} + 5) \\
 &= \sqrt{25n^2 + 7n + 1 + 32 + 50n} - \sqrt{(\sqrt{25n^2 + 7n + 1} + 5)^2} \\
 &= \sqrt{25n^2 + 7n + 1 + 32 + 50n} - \sqrt{25n^2 + 7n + 1 + 2(\sqrt{25n^2 + 7n + 1}) \cdot 5 + 5^2} \\
 &= \sqrt{25n^2 + 7n + 1 + 32 + 50n} - \sqrt{25n^2 + 7n + 26 + 10\sqrt{25n^2 + 7n + 1}} \\
 &= \sqrt{25n^2 + 7n + 26 + (50n + 7)} - \sqrt{25n^2 + 7n + 26 + 10\sqrt{25n^2 + 7n + 1}}
 \end{aligned}$$

Es ist $10\sqrt{25n^2 + 7n + 1} > 50n + 7$, somit $a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$. Die Folge ist also monoton fallend. Wir versuchen nun zu zeigen, dass die Reihe nach unten beschränkt ist:

$$\begin{aligned}
 a_n &> c \\
 \Leftrightarrow \sqrt{25n^2 + 7n + 1} - 5n &> c \\
 \Leftrightarrow \sqrt{25n^2 + 7n + 1} &> 5n + c \\
 \Leftrightarrow 25n^2 + 7n + 1 &> 25n^2 + 10nc + c^2 \\
 \Leftrightarrow 7n + 1 &> 10nc + c^2 \\
 \text{Wähle z.B. } c &= 0 \\
 1 &> 0
 \end{aligned}$$

1.3 Grenzwertberechnungen

Satz 1.15 (l'Hospital) Seien $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Ferner gelte $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0 \vee \infty$. Existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne, so auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ und die beiden sind gleich.

Man berechne folgende Grenzwerte:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5e^{2x}}{x^2 \cdot e^x}$

Lösung zu (a) :

Zähler und Nenner gehen gegen 0, also versuchen wirs mit L'Hospital: $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y'}{\sin(x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos(x)} = 1$ somit ist der gesuchte Grenzwert gefunden

zu (b) :

Wieder L'Hospital: $\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \frac{2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}} \rightarrow 0$

zu (c) :

$= \frac{5e^x}{x^2}$, wieder L'Hospital: $\frac{5e^x}{2x}$ und nochmal: $\frac{5e^x}{2} \rightarrow \infty$

2 Reihen

Definition 2.1 Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist definiert als die Folge der Partial- oder Teilsummen $S_m := \sum_{n=0}^m a_n$. Eine Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Eine Reihe heisst absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert

Satz 2.2 (Triviale Kriterium) Für eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Aufgabe 2.3 Untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2+n}{n}^{-\frac{1}{n}}$$

auf Konvergenz.

Lösung:

$$\begin{aligned} \binom{2+n}{n}^{-\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} \\ &= \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n+2}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

Also divergiert die Reihe nach dem Triviale Kriterium.

Satz 2.4 (Monotoniekriterium) Sind alle Summanden $a_n \geq 0$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}$ genau dann konvergent, wenn ihre Teilsummenfolge beschränkt ist

Satz 2.5 (absolute Konvergenz) Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent

Satz 2.6 (Cauchy Kriterium) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \left\| \sum_{k=m}^n a_k \right\| < \epsilon \quad \forall n \geq m \geq N$$

Aufgabe 2.7 Zeige, daß die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergiert.

Beweis: Für die Divergenz ist zu zeigen:

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists m > n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \right| < \epsilon$$

Wähle $\epsilon := \frac{1}{2}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $n := n_0$ und $m := 2n$. Dann gilt:

$$\left| \sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq (n+1) \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} = \epsilon$$

Zeige, daß die harmonische Reihe

Satz 2.8 (Leibniz Kriterium) Sei (a_n) eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Aufgabe 2.9 Untersuche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$$

auf Konvergenz.

Lösung: Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$$

Also liegt die Vermutung nahe, daß, sollte diese Reihe konvergieren, wir das mit dem Leibnizkriterium zeigen können. Also schauen wir uns an, ob $\left(\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \right)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge ist.

Zunächst zur Konvergenz:

$$\begin{aligned}
 a_n &:= \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \\
 0 &\leq \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{1}{n+1} \\
 &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{<3 \text{ nach B4, A5 } b \leq 1 \text{ und } \geq 0} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0} < 3 \forall n \in \mathbb{N} \\
 &\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} \text{ ist beschränkt} \\
 (n+1)^{2n} &= ((n+1)^2)^n = (n^2 + 2n + 1)^n \\
 &\leq (n^2 + 2n)^n = (n(n+2))^n = n^n (n+2)^n \\
 &\Rightarrow (n+1)^{2n} \geq n^n (n+2)^n \\
 &\Rightarrow \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \geq \frac{(n+2)^n}{(n+1)^{n+1}} \\
 &\Rightarrow a_n \text{ ist monoton fallend} \\
 &\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} \text{ ist konvergent}
 \end{aligned}$$

Nun zum Grenzwert:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} = 0
 \end{aligned}$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Reihe also.

Satz 2.10 (Quotientenkriterium) Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$. Ferner gebe es ein $q < 1$ derart, dass $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ ab einem Index n_0 . Dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Insbesondere gilt dies, wenn der Grenzwert $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existiert und < 1 ist.

Aufgabe 2.11 Untersuche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^3}{3^n}$$

auf Konvergenz.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 a_n &:= \frac{(2n)^3}{3^n} \\
 \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2(n+1))^3 \cdot 3^n}{(2n)^3 \cdot 3^{n+1}} = \frac{(n+1)^3}{3n^3} \\
 &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} < 1 \\
 &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\
 &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}
 \end{aligned}$$

Satz 2.12 (Wurzelkriterium) Für ein festes $q < 1$ gelte $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ ab einem Index n_0 dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Insbesondere gilt dies, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ existiert und < 1 ist.

Aufgabe 2.13 Untersuche die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$$

auf Konvergenz.

Lösung: Nach dem Wurzelkriterium folgt wegen $\sqrt[k]{a_k} = \frac{k}{2k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1$ die Konvergenz der Reihe.

Satz 2.14 (Majorantenkriterium) Gilt $0 \leq |a_n| \leq b_n$ ab einem n_0 und ist die Majorante $\sum b_n$ konvergent, so konvergiert $\sum a_n$ absolut

Bemerkung 2.15 (Partialbruchzerlegung) Partialbrüche sind rationale Funktionen der Form $\frac{A}{(x-x_0)^k}$ oder $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$. Solche Brüche lassen sich in Faktoren zerlegen

Satz 2.16 (Divergenzaussagen) Aus dem Trivialekriterium folgt: Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n , oder gilt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für alle n ab einem n_0 , so divergiert die Reihe $\sum a_n$. Insbesondere gilt dies, wenn der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ oder der Grenzwert $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existieren und > 1 sind.

Bemerkung 2.17 Im Fall $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1$ bzw. $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1$ ist ohne Zusatzinformation keine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz möglich.

Zum Beispiel gilt für die beiden Reihen $\sum \frac{1}{n}$ und $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

Die erste Reihe ist divergent, die zweite konvergent.

Aufgabe 2.18 Sei (a_n) monoton wachsend, $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$\sum \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) \text{ konvergiert} \iff (a_n) \text{ ist beschränkt}$$

Hinweis für $\Rightarrow$: Cauchy-Kriterium.

Beweis:

$\Rightarrow$ Annahme: (a_n) ist unbeschränkt.

Da (a_n) monoton wachsend, gilt für $m > n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right) &= \sum_{k=n}^m \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k} \\ &\geq \frac{1}{a_m} \sum_{k=n}^m (a_{k+1} - a_k) = \frac{1}{a_m} (a_{m+1} - a_n) \geq 1 - \frac{a_n}{a_m} \end{aligned}$$

Da (a_n) unbeschränkt ist, gibt es zu jedem a_n ein $m > n$ mit $a_m > 2a_n$, also mit $1 - \frac{a_n}{a_m} > \frac{1}{2}$. Also gibt es zu jedem n ein $m > n$ mit $\sum_{k=n}^m \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \right) > \frac{1}{2}$. Mit dem Cauchy-Kriterium folgt die Divergenz der Reihe.

$\Leftarrow$ Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Dann ist $\sum (a_{n+1} - a_n)$ eine konvergente Teleskopreihe. Wegen

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \leq \frac{1}{a_1} (a_{n+1} - a_n)$$

folgt die Konvergenz der Reihe $\sum \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$ aus dem Majorantenkriterium.

Aufgaben 2.19 Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und bestimme ggf. (außer bei e) ihren Grenzwert:

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

b)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{5 \cdot 3^k}$$

c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^4 + 2k^3 + k^2}$$

d)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2} 2^k}$$

e)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} 2^n$$

Lösungen:

a)

$$\sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \sqrt{n} - \sqrt{0} = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Also divergiert die Reihe.

b)

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{2^{k+1}}{5 \cdot 3^k} &= \frac{2^3}{5 \cdot 3^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{2^3}{5 \cdot 3^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^4 + 2k^3 + k^2} &= \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2 \cdot (k^2 + 2k + 1)} = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2 (k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{\frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2} 2^k}} &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e}{2} > 1 \end{aligned}$$

Also divergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

e)

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{(n+1)! \cdot 2^{n+1} \cdot n^n}{n! \cdot 2^n (n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e} < 1 \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

2.1 Potenzreihen

Definition 2.20 Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (1)$$

heißt *Potenzreihe zum Entwicklungspunkt* $z_0 \in \mathbb{R}$. Dabei gilt $a_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) und $z \in \mathbb{R}$.

Beispiele 2.21 Die Exponentialfunktion ist über eine Potenzreihe definiert:

$$\exp(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{R})$$

Satz 2.22 (Konvergenz von Potenzreihen)

- a) Zu jeder Potenzreihe (1) gibt es eine Zahl r , $0 \leq r \leq \infty$, den sogenannten *Konvergenzradius* der Potenzreihe mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} |z - z_0| < r &\implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ absolut konvergent} \\ |z - z_0| > r &\implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ divergent} \end{aligned}$$

- b) Konvergenzradius nach der Formel von Cauchy, Hadamard

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Dabei setzt man: $\frac{1}{\infty} := 0$ und $\frac{1}{0} := \infty$

- c) Falls einer der folgenden Grenzwerte existiert bzw. gleich ∞ ist, ist er gleich dem Konvergenzradius r :

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}, \quad r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

- d) Formal kann man Potenzreihen differenzieren und erhält

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

Dies ist wiederum eine Potenzreihe. Der Konvergenzradius ist identisch mit dem Konvergenzradius der Ausgangsreihe.

Beweis

a) Wir definieren

$$r := \sup \left\{ |w| \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent} \right\}$$

Dann gilt $0 \leq r \leq \infty$ und für $|z - z_0| > r$ ist die Potenzreihe divergent. Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe (absolut) konvergent nur für $z = z_0$. Sei also $r > 0$ und $0 < \rho < r \Rightarrow$

$\exists w \in \mathbb{R}, |w| > \rho : \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent}$

$$\exists M > 0 : \forall k \geq 0 : |a_k w^k| \leq M \quad ((a_k w^k)_{k \geq 0} \text{ ist beschränkt})$$

Sei nun $|z - z_0| \leq \rho < |w|$. Dann gilt:

$$|a_k (z - z_0)^k| = |a_k w^k| \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq M \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

Es gilt:

$$\left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq \left| \frac{z - z_0}{w} \right| < 1$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$ eine geometrische Reihe. Wir haben demnach:

$$|a_k (z - z_0)^k| \leq b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

Majorantenkriterium $\Rightarrow$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergiert absolut und gleichmäßig für $|z - z_0| \leq \rho$.

b) Wir verwenden das Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned} \forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)^k|} \leq q < 1 &\Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)^k|} < 1 \\ &\Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |z - z_0| < 1 \\ &\Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \end{aligned}$$

c) Die erste Aussage folgt aus Teil b. Für den zweiten Teil verwenden wir das Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{k+1} (z - z_0)^{k+1}}{a_k (z - z_0)^k} \right| < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

Also:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} (z - z_0)^{k+1}}{a_k (z - z_0)^k} \right| < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

d) nach Teil b ist zu brechnen:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|}$$

Wegen $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$ gilt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Also sind die Konvergenzradien der Ausgangsreihe und der abgeleiteten Reihe identisch.

Aufgabe 2.23 Man zeige die Konvergenz von $\sqrt[k]{k}$.

Lösung: Man zeigt die Konvergenz folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{k} &:= 1 + r_k, \quad r_k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k = (1 + r_k)^k \geq 1 + \frac{k(k-1)}{2} r_k^2 \\ &\Rightarrow \quad r_k^2 \geq \frac{2}{k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \\ &\Rightarrow \quad r_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Aufgaben 2.24 Eine einfache Aufgaben über Potenzreihen, die man kennen muß

a) Gegen was konvergiert und welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$?

Lösung: Geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-x}$$

Konvergenzradius:

$$\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|1|}} = 1$$

also konvergiert die Potenzreihe für alle $x : |x| < 1$

b) Gegen was konvergiert und welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$?

Lösung: Exponentialreihe:

$$e^x$$

Konvergenzradius:

$$\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{n!}\right|}} = \infty$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \rightarrow 0$ damit geht der Kehrwert gegen ∞ . Also konvergiert die Reihe für alle $x : |x| < \infty$.

c) Gegen was konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ und wie lautet ihr Konvergenzradius ?

Lösung: *Logarithmus:*

$$\ln(1+x)$$

Konvergenzradius:

$$\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|}}$$

Da die Summe ab 1 startet muss hier noch eine Indextransformation gemacht werden $k \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right|}} \\ &= \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Also konvergiert die Potenzreihe für $|x| < 1$.

- d) Gegen was konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und wie lautet der Konvergenzradius?

Lösung: *Sinus:*

$$\sin(x)$$

Konvergenzradius:

$$\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right|}}$$

Wie beim Logarithmus ist auch hier direkt klar, daß die Potenzreihe für alle $x : |x| < \infty$ konvergiert (der $\limsup$ geht gegen 0 und damit das Ganze gegen ∞).

- e) Gegen was konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und wie ist der Konvergenzradius der Potenzreihe?

Lösung: *Cosinus:*

$$\cos(x)$$

Konvergenzradius:

siehe Sinus.

- f) Gegen was konvergiert und wie lautet der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$?

Lösung: Arcustangens

$$\arctan(x)$$

Konvergenzradius:

$$\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^n}{2n+1} \right|}}$$

wird also maximal bei $n = 0$ und damit ist der Konvergenzradius 1 und die Potenzreihe konvergiert für alle $x : |x| < 1$.

Aufgaben 2.25 Jetzt einige schwere Aufgaben

- a) Seien ρ_1 und ρ_2 die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. Sei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k b_k) z^k$. Zeigen Sie: Dann ist $\rho \geq \rho_1 \rho_2$.

Beweis: Wir verwenden das Wurzelkriterium:

$$\begin{aligned} \forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{|a_k b_k z^k|} < q \leq 1 &\Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k b_k z^k|} < 1 \\ &\Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k b_k|} |z| < 1 \\ &\Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k b_k|}} \\ &\Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|}} \\ &\Leftrightarrow |z| < \rho_1 \rho_2 \\ &\Rightarrow \rho_1 \rho_2 \leq \rho \end{aligned}$$

- b) Seien alle $a_k \neq 0$, $\tau > 0$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und ρ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a_k}$. Zeigen sie: Dann ist $\rho \leq \frac{1}{\tau}$

Lösung: Der Lösungsweg mit dem Wurzelkriterium ist wohl nach der obigen Aufgabe trivial. Man erhält:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \\ \rho &= \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{a_k} \right|}} \end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned}
 \rho \leq \frac{1}{\tau} &\Leftrightarrow \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{a_k}\right|}} \leq \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{a_k}\right|}} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{a_k}\right|} \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{\limsup_{k, l \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{a_k}\right|} \sqrt[l]{|a_l|}} \leq 1
 \end{aligned}$$

Und dies ist gegeben da für den Grenzfall $k = l$ gilt:

$$\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{a_k}\right|} |a_k|} = 1 \leq 1$$

Für $k \neq l$ kann also $\left|\frac{1}{a_k}\right|$ und $|a_l|$ nur noch grösser werden.

3 Stetigkeit

Definition 3.1 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Die Funktion f heisst im Punkt a stetig, falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Satz 3.2 ($\epsilon - \delta$ -Kriterium der Stetigkeit) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann in $p \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon \quad \forall x \in D : |x - p| < \delta$$

Satz 3.3 Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die in $a \in D$ stetig sind und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

- $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$
- $\lambda f : D \rightarrow \mathbb{R}$
- $fg : D \rightarrow \mathbb{R}$

im Punkt a stetig. Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g} : D' \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ in a stetig.

Aufgabe 3.4 Zeige unter Verwendung des ϵ - δ -Kriteriums, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Lösung: Offensichtlich ist f stetig in allen Punkten $x \neq 0$. Diesen Punkt betrachten wir jetzt gesondert:

Sei $\epsilon > 0$, wähle $\delta = \epsilon$, es gilt:

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \leq \begin{cases} x \cdot 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \leq |x| < \delta = \epsilon$$

Aufgabe 3.5 Untersuche folgende Funktion auf Stetigkeit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\exp(\frac{1}{|x|})} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Lösung: f ist für $x \neq 0$ offensichtlich stetig, wir untersuchen die Stelle $x = 0$ wieder gesondert, diesmal mit dem Grenzwertkriterium:

f ist stetig in $x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\exp(\frac{1}{|x|})} = f(0) = 0$. Wir betrachten die einseitigen

Grenzwerte:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{\exp(\frac{1}{|x|})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{\exp(\frac{1}{x})} \\ &\rightarrow 0 \\ & \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2}{\exp(\frac{1}{|x|})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2}{\exp(-\frac{1}{x})} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Also ist die Funktion überall stetig

Aufgabe 3.6 Man untersuche folgende Funktion auf Stetigkeit:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Lösung Wir benutzen das Folgenkriterium: 1. Fall: Sei $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists (x_n)$ mit $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$

Annahme: f ist stetig in a

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) = a$ aber: x_n ist eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow x_n^2 - x_n = f(x_n)$

$\Rightarrow a = f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 - x_n = a^2 - a$

$\Rightarrow a = a^2 - a \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2$

$\Rightarrow f_3$ nur stetig in $a = 2$ und $a = 0$

2. Fall: $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists (y_n)$ mit $y_n \in \mathbb{Q}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$

Annahme: f ist stetig

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(b) = b^2 - b$, da $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$b = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(b) = b^2 - b$

$b^2 - b = b$ nicht lösbar für alle b