



Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I

WS 2000/01 Blatt 12

Abgabe: Freitag, den 02.02.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 41:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 5, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie Basen von Kern φ_A und Bild φ_A .

Aufgabe 42:

Sei $\varphi \in \text{End}_K(V)$ mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Zeigen Sie, daß es Untervektorräume U, W von V gibt mit:

- (i) $V = U \oplus W$
- (ii) $\varphi(W) = 0$
- (iii) $\varphi(u) = u \ \forall u \in U$

Aufgabe 43:

Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume mit $V = V_1 \oplus V_2$, $W = W_1 \oplus W_2$ sowie $\varphi : V \rightarrow W$ linear mit $\varphi(V_i) \subset W_i$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, daß es Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W gibt mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

wobei $A \in M(\dim W_1 \times \dim V_1, K)$, $B \in M(\dim W_2 \times \dim V_2, K)$.

Aufgabe 44:

- (i) Gegeben sei die Menge von Matrizen

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, (-1 \ 2 \ 0 \ 8), \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie für alle Paare $(A, B) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ das Produkt $A \cdot B$, falls dieses definiert ist.

(ii) Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maple-Aufgabe M3:

Sie haben für Aufgabe M2 eine weitere Woche Zeit!